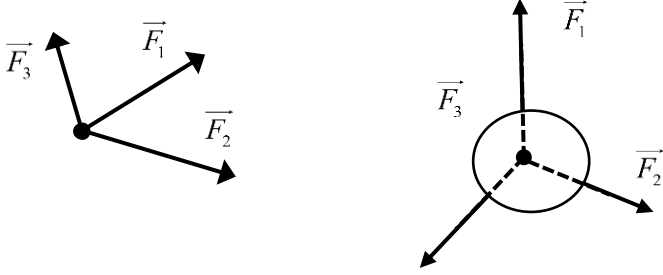


3. DÜZLEMDE BİR NOKTADA KESİŞEN KUVVETLER

3.1. Giriş

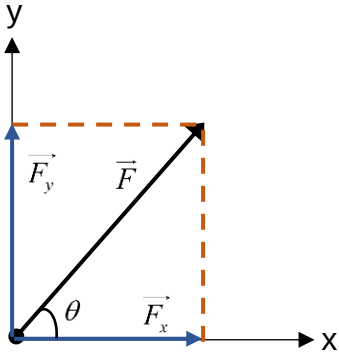
Kuvvetlerin kendisi veya doğrultuları bir noktada kesişir.



Şekil 3.1

3.2. Bir Kuvvetin Dik Bileşenleri

Pek çok problemde bir kuvveti birbirine dik iki bileşene ayırmak problemin çözümünü kolaylaştırır.



Şekil 3.2

$$F_x = F \cos \theta$$

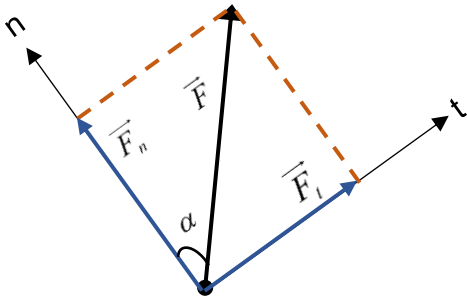
$$F_y = F \sin \theta$$

NOT

Sadece kartezyen koordinat sistemi değil, birbirine herhangi iki dik eksen olabilir.

F vektörünün x ve y doğrultularındaki birim vektörler cinsinden gösterimi:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

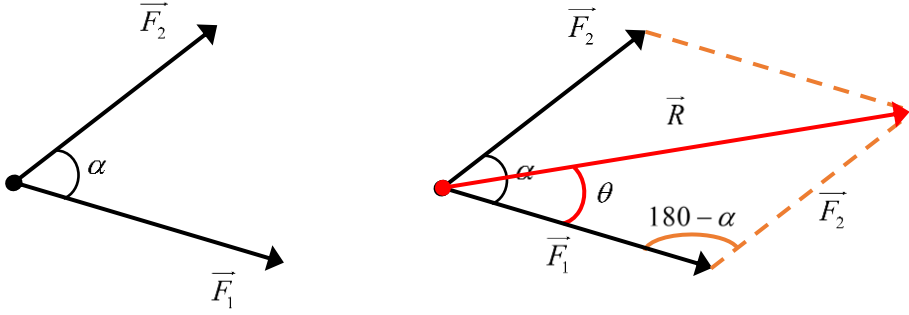


$$F_t = F \sin \alpha$$

$$F_n = F \cos \alpha$$

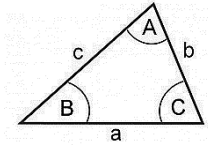
3.2. Bir Noktada Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesi

Aynı noktada kesişen ve aralarında α açısı bulunan iki kuvvetin bileşkesi kosinüs teoremi yardımıyla bulunabilir.



Şekil 3.3

Verilen üçgende kosinüs teoremi aşağıdaki gibi tanımlanır.



Şekil 3.4

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Kosinüs teoremi Şekil 3.3'te sağda verilen üçgene uygulanırsa:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180 - \alpha), \quad \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$$

aynı noktada kesişen iki kuvvetin bileşkesi:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

olarak bulunur. Bileşkenin F_1 kuvveti ile yaptığı θ açısı ise sinüs teoremi kullanılarak bulunabilir. Şekil 3.4 'te verilen üçgen için sinüs teoremi:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

şeklindedir. Sinüs teoremi Şekil 3.3'te sağda verilen üçgene uygulanırsa:

$$\frac{F_2}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin(180 - \alpha)}, \quad \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$$

θ açısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sin \theta = \sin \alpha \frac{F_2}{R} \quad \text{ise} \quad \theta = \sin^{-1} \left(\sin \alpha \frac{F_2}{R} \right)$$

NOT

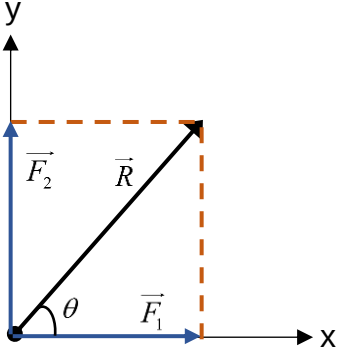
θ açısının F_1 kuvveti ile yapılan açı olduğuna dikkat ediniz. x eksenine ile yapılan açı değil.

DÜŞÜN

Maksimum kuvvet için α ne olmalıdır?

Minimum kuvvet için α ne olmalıdır?

Özel Durum: $\alpha = 90^\circ$



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \cos 90 = 0$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

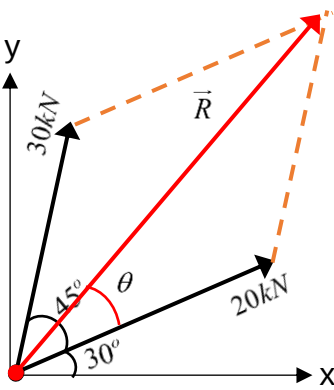
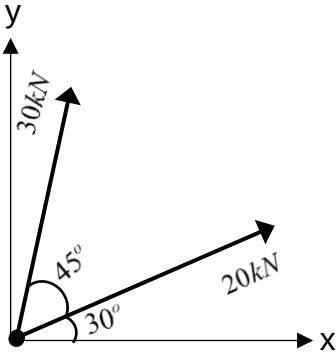
$$\sin \theta = \sin \alpha \frac{F_2}{R}$$

$$\sin \alpha = \sin 90 = 1$$

$$\sin \theta = \frac{F_2}{R} \quad \text{veya} \quad \tan \theta = \frac{F_2}{F_1}$$

Örnek 1

Verilen şekildeki iki kuvvetin bileşkesini ve bileşkenin x eksenine yaptığı açığı bulunuz.



$$R = \sqrt{20^2 + 30^2 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cos 45} = 46,35 \text{ kN}$$

$$\frac{30}{\sin \theta} = \frac{46,35}{\sin(180 - 45)}$$

$$\sin \theta = 0.458$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.458) = 27.2$$

x eksenini ile yapılan açı: $30+27.2=57.2$ dir.

DÜŞÜN

İkiden fazla kuvvet olursa bileşke nasıl bulunabilir?

3.3. Bir Noktada Kesişen Kuvvetlerin Bileşkesi

Çeşitli aynı düzlemde bulunan kuvvetlerin sonucunu belirlemek için dikdörtgen bileşenleri kullanabiliriz, yani tümü aynı düzlemde, örneğin xy düzleminde bulunan kuvvetler. Bunun için her bir kuvvet önce x ve y bileşenlerine çözümlenir, ardından ilgili bileşenler, çizgisel cebir kullanılarak eklenir çünkü bunlar doğrusaldır. Sonuç kuvveti daha sonra paralelkenar kuralı kullanılarak sonuç bileşenleri eklenerek oluşturulur.

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}$$

⋮

$$\vec{F}_n = F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j}$$

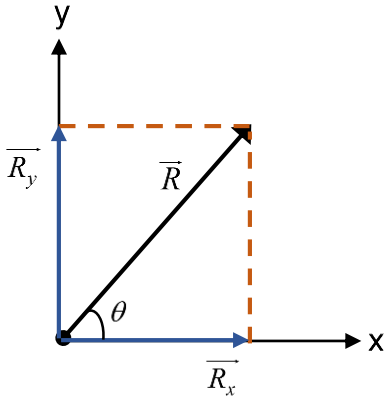
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{R} = (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}) + \dots + (F_{nx}\vec{i} + F_{ny}\vec{j})$$

$$\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny})\vec{j}$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$



Sonuç kuvvetin bileşenleri belirlendikten sonra, bunlar uygun yönlendirme duygusuyla x ve y eksenleri boyunca çizilebilir ve sonuç kuvvet vektör toplamı ile belirlenebilir.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

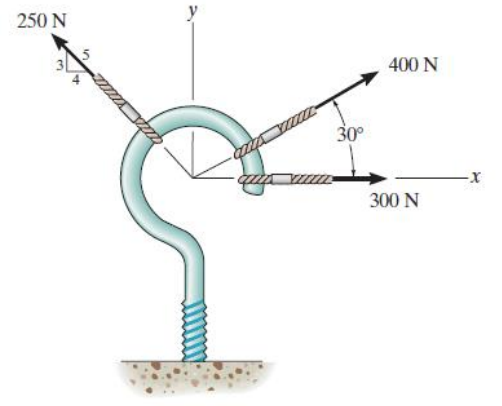
$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

Bileşke Kuvvet Problemleri

- Problemden belirtilmemişse x-y eksenini belirleyin
- Verilen tüm kuvvetleri bileşenlerine çözün
- Sadece denklemleri kullanarak sonuç bileşenlerini bulun, $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$
- Sonucun büyüklüğünü ve açısını hesaplayın

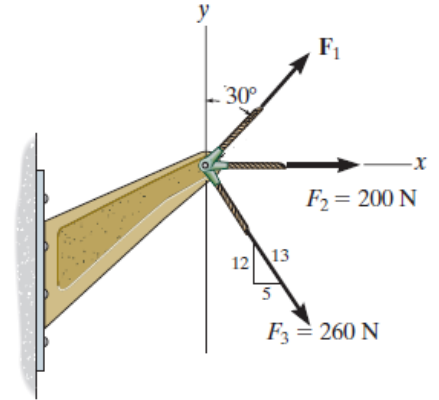
Örnek 2

Bileşke kuvvetin büyüklüğünü ve yönünü belirleyin.



Örnek 3

Bileşke kuvvet $+x$ yönünde ise $\vec{F}_1$ kuvvetinin ve bileşke kuvvetin şiddetini bulunuz.

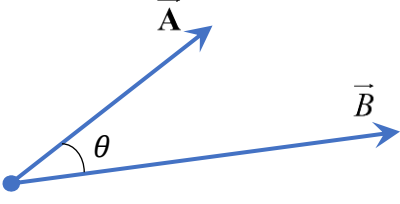


3.4. Skaler (Nokta) Çarpım

İki vektör $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin nokta çarpımı, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin büyüklüklerinin ve A ve $\vec{B}$ tarafından oluşturulan θ açısının kosinüsünün çarpımı olarak tanımlanır. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'nin nokta çarpımı $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ile gösterilir.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

İki vektörün nokta çarpımının sonucu skaler olduğu için, nokta çarpım aynı zamanda skaler çarpım olarak adlandırılır.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{AB}$$