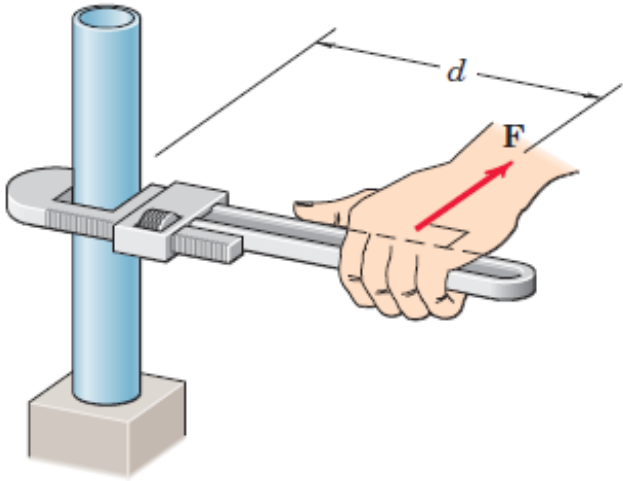


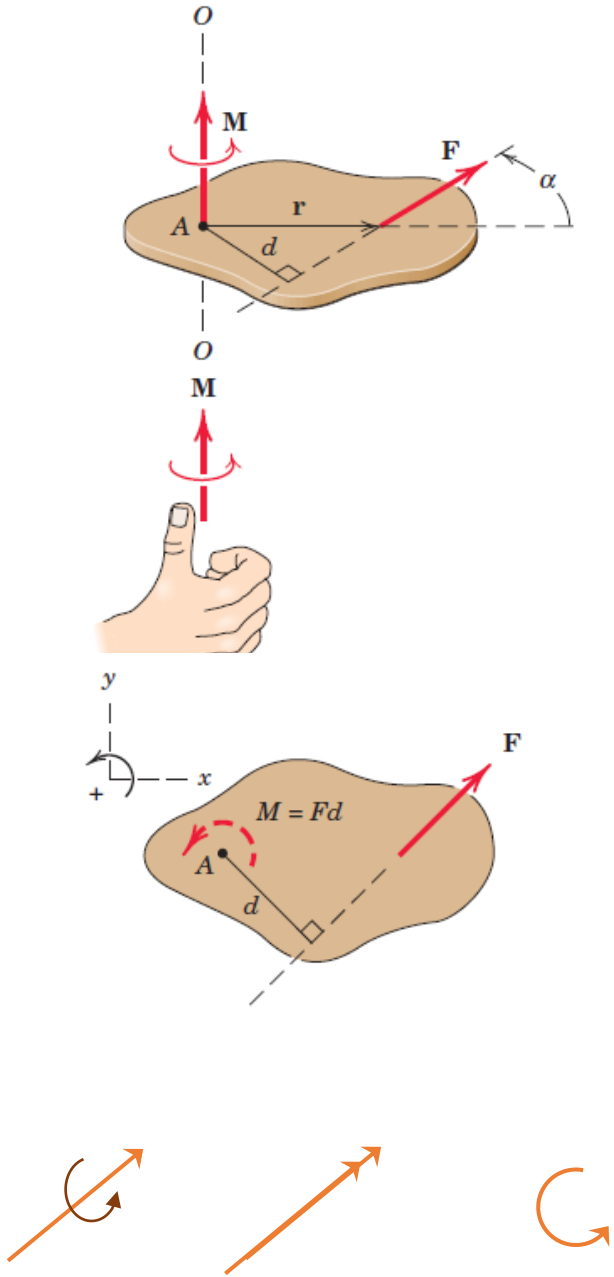
BÖLÜM 5. Düzlem Kuvvetler Sistemi

5.1. Kuvvetin Momenti (Bir Nokta Etrafındaki) – Skaler Formülasyon

Bir kuvvetin bir cismin hareket etme eğilimine ek olarak, aynı zamanda bir cismin bir eksende dönme eğilimine de neden olabilir. Eksen, kuvvetin hareket doğrultusunu ne kesen ne de ona paralel olan herhangi bir çizgi olabilir. Bu dönme eğilimine kuvvetin momenti M denir. Moment aynı zamanda tork olarak da adlandırılır.



Moment kavramının tanıdık bir örneği olarak, verilen şekildeki penseyi düşünelim. Pense koluna dik uygulanan kuvvetin bir etkisi, borusunu dikey eksenini etrafında döndürme eğilimidir. Bu eğilimin büyüklüğü, hem kuvvetin $F \rightarrow$ büyüklüğüne hem de pense kolunun etkili uzunluğu d 'ye bağlıdır.



Şiddet. Sol figür, düzleminde bir kuvvet $\vec{F}$ tarafından etkilenen iki boyutlu bir cisimi gösterir. Kuvvetin cismin O noktası etrafında (eksen O-O) dönmeye olan eğilimini veya momentinin büyüklüğü, kuvvetin büyüklüğüne ve moment kolunu d 'ye, yani eksenin kuvvetin etki çizgisine olan dik uzaklığına, orantılıdır. Bu nedenle momentin büyüklüğü şu şekilde tanımlanır:

$$M_A = Fd \quad (1)$$

NOT: Eğer bir kuvvetin etki çizgisi A noktasından geçiyorsa, kuvvet o nokta A etrafında herhangi bir moment oluşturmaz. ($M_A = Fd = M_A = F0 = 0$)

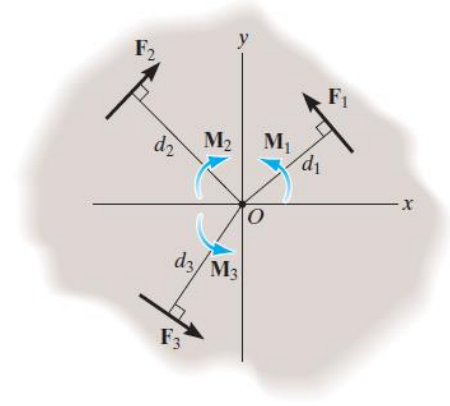
Yön. Moment vektörü, cismin düzlemine dik bir $\vec{M}$ vektörüdür. $\vec{M}$ 'nin yönü, F 'nin cismin dönme eğilimini gösterdiği yöne bağlıdır. Bu yönü belirlemek için sağ el kuralı kullanılır. $\vec{F}$ 'nin A etrafındaki momentini, başparmağın yönünde, parmaklar ise dönme eğiliminin yönünde kıvrılarak gösteririz.

Belirli bir düzlemde etki eden kuvvetlerle uğraştığımızda, genellikle bir nokta etrafındaki momentten bahsederiz. Bu durumda, bir eksene dik ve noktadan geçen momentten söz ediyoruz. Moment vektörü şu şekilde gösterilebilir:

Birim. SI birimlerinde momentin temel birimi newton-metredir (N.m veya Nm).

İşaret Kuralı.

Bir gelenek olarak, genellikle pozitif momentleri saat yönünün tersine (sayfa dışına doğru olan pozitif z eksenini boyunca) düşüneceğiz. Saat yönünde olan momentler negatif olacaktır. Bu şekilde her bir momentin yönsel anlamı artı veya eksi işaretiyle temsil edilebilir.



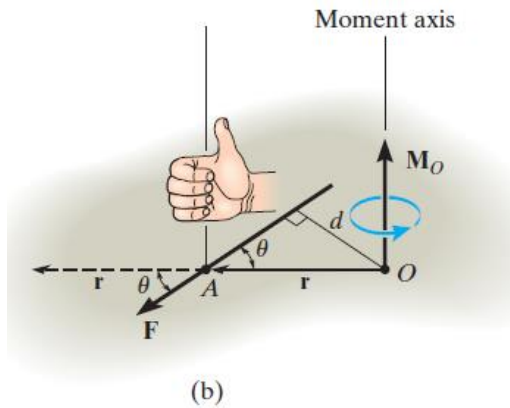
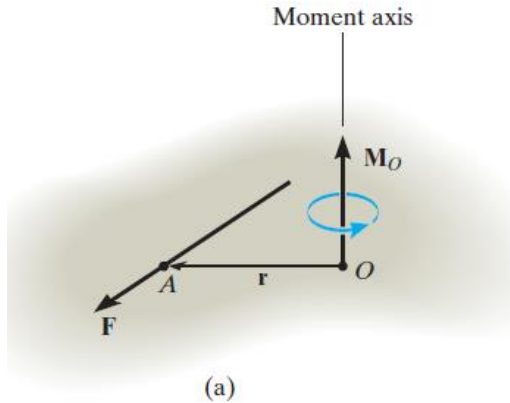
Bileşke Moment. İki boyutlu problemler için, tüm kuvvetlerin aynı düzlemde olduğu durumlarda, nokta O (z eksenindeki) etrafındaki sonuç momenti $(\vec{M}_R)_O$, sistemdeki tüm kuvvetlerin neden olduğu momentlerin cebirsel toplamını bulmak suretiyle belirlenebilir. Yukarıda verilen işaret konvansiyonunu kullanarak, her bir momentin yönsel anlamını artı veya eksi işaretle temsil edebiliriz.

Bu işaret konvansiyonunu kullanarak, pozitif yönü belirlemek için sembolik bir curl kullanılarak, şekildeki sonuç momenti şu şekildedir:

$$(M_R)_O = M_1 - M_2 + M_3 = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3$$

Bu toplamın sayısal sonucu pozitif bir skaler ise, $(\vec{M}_R)_O$ saat yönünün tersine bir moment olacaktır (sayfadan dışarıya doğru); ve eğer sonuç negatifse, $(\vec{M}_R)_O$ saat yönünde bir moment olacaktır (sayfaya doğru içeriye).

5.2. Bir Kuvvetin Momenti – Vektörel Formülasyon



Bir kuvvetinin O noktasındaki momentini veya aslında O noktasından geçen ve O ve $\vec{F}$ 'yi içeren düzleme dik olan moment eksenine göre ifade edilebilir, yani,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Burada $\vec{r}$, $\vec{F}$ 'in doğrultusundaki herhangi bir noktadan O'ya yönlendirilmiş bir konum vektörünü temsil eder.

NOT: Vektörel çarpımın değişme yasasını takip etmediği için $(\vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{F} \times \vec{r})$, $\vec{M}_O$ 'ın doğru yönlendirme anlamını üretmek için $\vec{r} \times \vec{F}$ 'in sırası korunmalıdır.

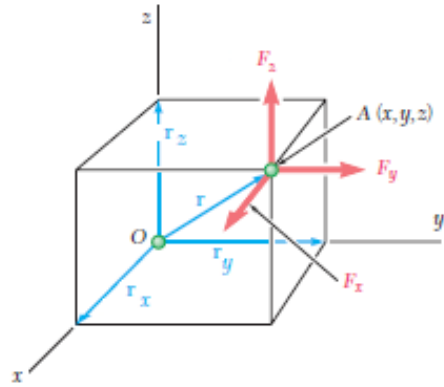
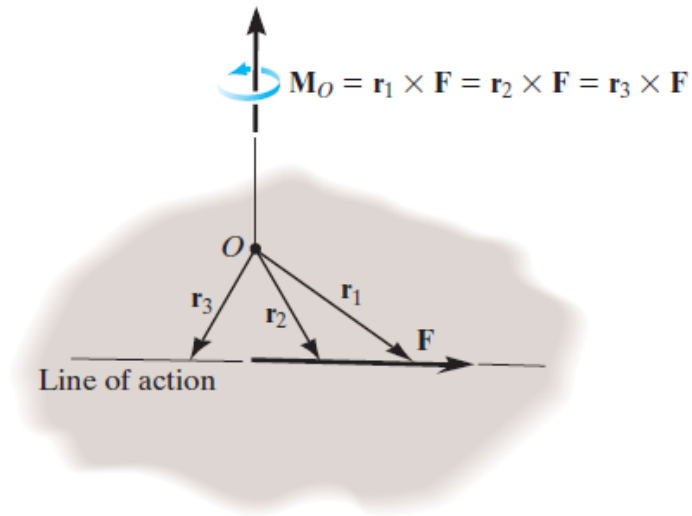
Şiddet. Vektörel çarpımın büyüklüğü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_O = rF \sin \theta$$

Bu açıyı belirlemek için $\vec{r}$ nin düzgün bir şekilde oluşturulabilmesi için θ 'yı belirlemek üzere $\vec{r}$ 'nin kayan bir vektör olarak ele alınması gerekir

$$M_O = rF \sin \theta = F(r \sin \theta) = Fd$$

Yön. $\vec{M}_O$ 'ın yönü ve anlamı, vektörel çarpımda uygulanan sağ el kuralı tarafından belirlenir.



Taşınabilirlik Prensibi. Kuvvet kayan bir vektördür (Statikte) ve serbestçe hareket edebilir. Başka bir deyişle, kuvvetin $\vec{F}$ çizgisinde herhangi bir noktaya ölçülen herhangi bir konum vektörü $\vec{r}$ kullanabiliriz.

Kartezyen Vektör Formülasyonu. Eğer konum vektörü $\vec{r}$ (O'dan $\vec{F}$ 'nin hareket çizgisindeki herhangi bir noktaya) ve kuvvet $\vec{F}$, Cartesian vektörleri olarak ifade edilirse, bir noktadaki $\vec{M}_O$ momenti şu şekilde ifade edilebilir.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$$

Kuvvetler Sisteminin Bileşke Momenti. Eğer bir cisim bir kuvvet sistem tarafından etkileniyorsa, kuvvetlerin O noktasındaki toplam momenti, her kuvvetin momentinin vektör toplamıyla belirlenebilir. Bu sonuç sembolik olarak şu şekilde yazılabilir:

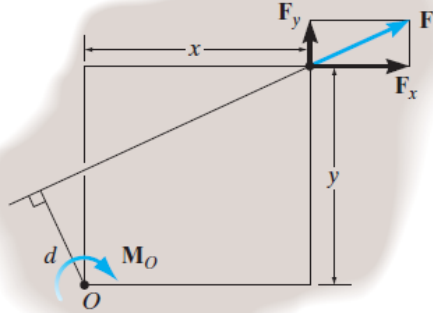
$$\vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

5.3. Varignon's Teoremi

Bu, bir noktadaki bir kuvvetin momentinin, kuvvetin bileşenlerinin noktadaki momentlerinin toplamına eşit olduğunu belirtir.

Bu teorem, vektör çarpımının dağılma yasasına uyması nedeniyle kolayca kanıtlanabilir.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = -F_x y \vec{k} + F_y x \vec{k}$$



İki boyutlu problemler için, kuvveti dikdörtgen bileşenlerine çözerek ve ardından momenti skaler bir analiz kullanarak belirleyerek Varignon Teoremi'ni kullanabiliriz.

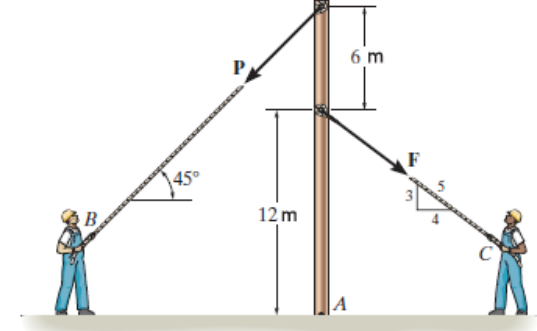
$$M_O = -F_x y + F_y x$$

Bu yöntem, genellikle aynı momenti bulmaktan daha kolaydır.

$$M_O = Fd$$

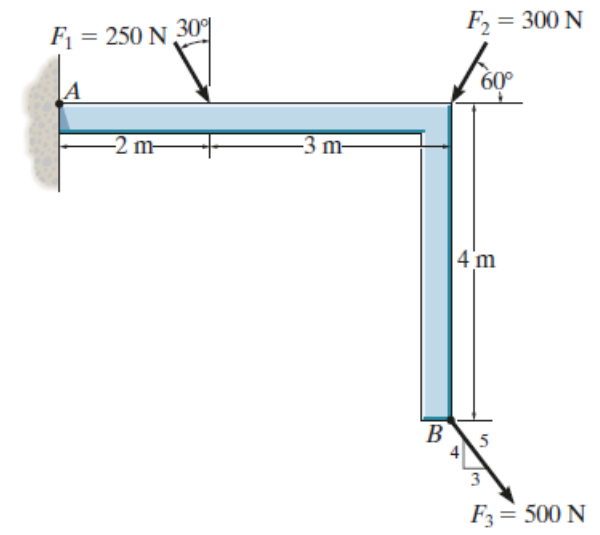
Örnek 1.

Eğer B'deki adam halatına $P = 300\text{N}$ bir kuvvet uygularsa, C'deki adamın A etrafındaki toplam momentin sıfır olması için, yani her iki kuvvetin neden olduğu sonuçta dönme momentinin sıfır olması için C'deki adamın uygulaması gereken kuvvet F büyüklüğünü belirleyin.

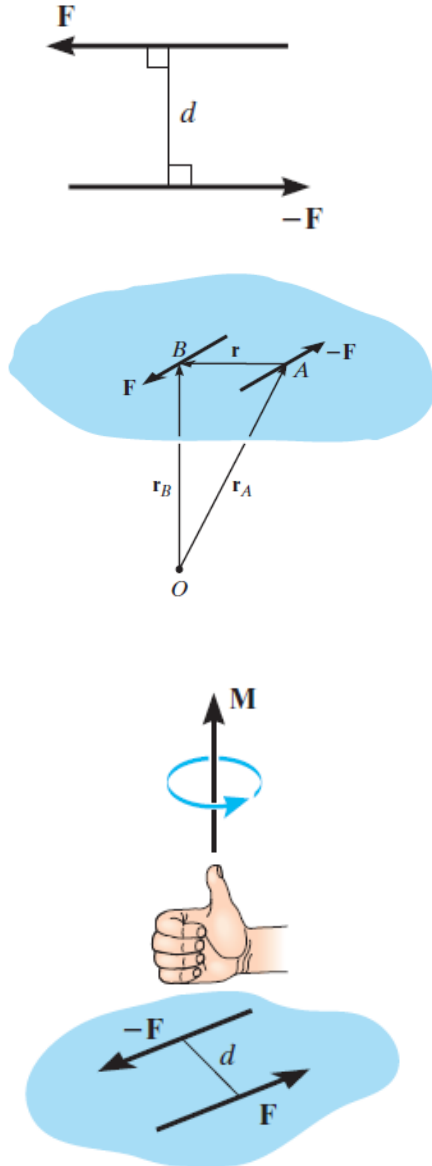


Örnek 2.

A noktasına etkiyen toplam momenti bulunuz.



5.4. Kuvvet Çifti



Kuvvet çifti, aynı büyüklükte ancak zıt yönlerde sahip iki paralel kuvvet olarak tanımlanır ve aralarında dik bir mesafe d 'dir. Sonuçta bileşke kuvvet sıfır olduğundan, çiftin tek etkisi gerçek bir dönüş yapmaktır veya hareket mümkün değilse belirli bir yönde dönme eğilimidir.

Bu kuvvet çifti tarafından oluşturulan momentin şiddetini belirlemek için herhangi bir keyfi noktadaki her iki çift kuvvetin momentlerinin toplamını bularak belirleyebiliriz.

$$\vec{M} = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

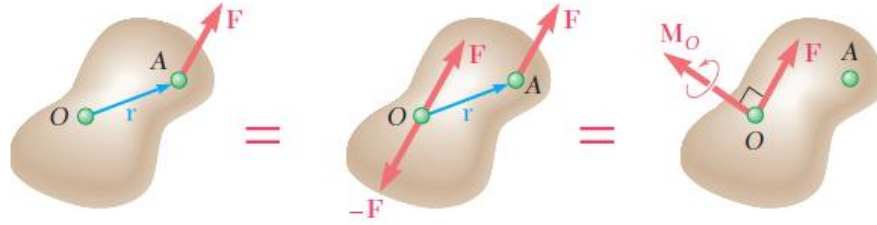
Bu sonuç, bu momentin serbest bir vektör olduğunu, yani $\vec{M}$ yalnızca kuvvetler arasında yönlendirilen konum vektörüne $\vec{r}$ 'ye bağlı olduğunu, $\vec{r}_A$ veya $\vec{r}_B$ 'ye bağlı olmadığını, göstermektedir.

Verilen kuvvet çiftinin momentinin büyüklüğü şu şekilde tanımlanır:

$$M = Fd$$

Burada F , kuvvetlerden birinin büyüklüğünü ve d , kuvvetler arasındaki dik mesafeyi veya moment kolu büyüklüğünü temsil eder. Momentinin yönü ve anlamı, sağ el kuralı kullanılarak belirlenir; burada başparmak, çift kuvvetlerin neden olduğu dönme hissiyatıyla parmaklar kıvrıldığında bu yöneyi gösterir. Her durumda, moment bu kuvvetleri içeren düzleme dik olarak etki eder.

5.5. Kuvvetler Sisteminin Tek Bir Noktaya Taşınması (İndirgenmesi) – Eşdeğer Sistem

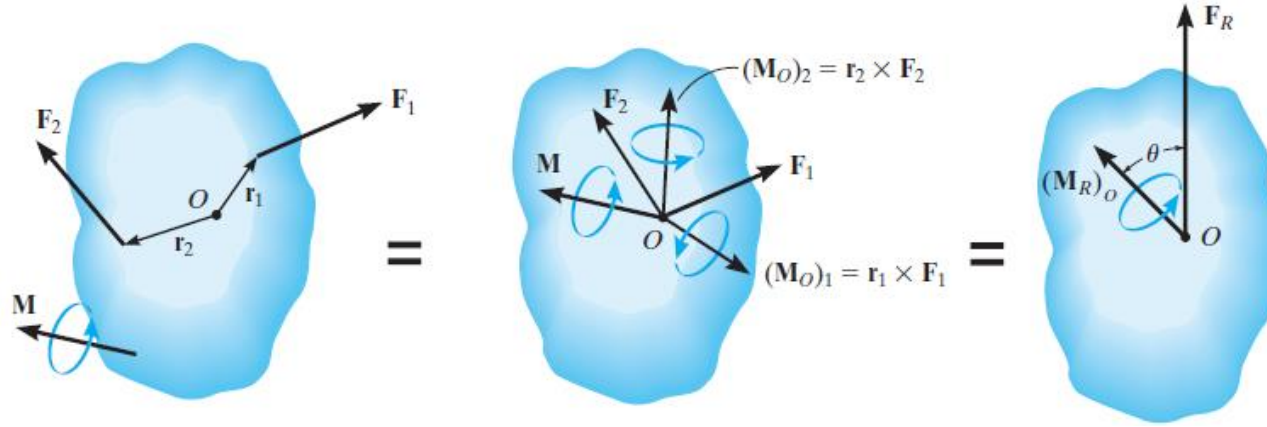


A noktasına etki eden bir kuvvet $\vec{F}$ 'yi düşünelim. Her ne kadar kuvveti taşınabilirlik prensibi doğrultusunda etki noktası boyunca hareket ettirebiliyorsak da, bu noktayı orijinal etki çizgisi üzerinde olmayan bir O noktasına taşıyamayız. Bununla birlikte, $\vec{F}$ 'nin orijinal kuvvetin cisim üzerindeki etkisini değiştirmeden O noktasına taşınmasını istiyorsak, O noktasına $\vec{F}$ 'ye eşit bir kuvvet ve $-\vec{F}$ 'ye eşit diğer bir kuvvet ekleyebiliriz.

Bu dönüşümün bir sonucu olarak, bir kuvvet $\vec{F}$ şimdi O noktasında uygulanmaktadır; diğer iki kuvvet bir moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ oluşturur. Bu nedenle, bir cisim üzerine etki eden herhangi bir kuvvet $\vec{F}$, momentinin O noktasındaki momentle eşit olan bir çift eklenerek istenilen herhangi bir noktaya taşınabilir. Bazen, bir cisim üzerine etki eden bir kuvvet ve moment çifti sistemini daha basit bir formda bir eşdeğer sistemle değiştirerek kullanmak pratik olabilir. Bir sistem, dış etkilerinin bir cisim üzerindeki etkilerinin, orijinal kuvvet ve moment çifti sistemi tarafından neden olduğu etkilerle aynı olduğunda eşdeğerdir.

Kuvvetler ve Momentler Sistemi.

Yukarıdaki yöntemi kullanarak, bir cisim üzerine etki eden bir dizi kuvvet ve moment sistemi, eşdeğer bir tek sonuç kuvveti ve bir moment ile ifade edilebilir.



NOTLAR:

- Kuvvet, taşınabilirlik ilkesine göre, kayan bir vektördür ve tesir çizgisi üzerinde hangi noktada cisme uygulanırsa uygulansın sistemde aynı etkiyi oluşturur.
- Moment, bir serbest vektör (Statikte) olduğundan, cisim üzerindeki her noktada aynı etkiyi oluşturacaktır.
- Bir kuvvet, tesir çizgisi dışında bir noktaya taşındığında, kuvvete ek olarak iki nokta arasındaki kuvvet çiftinin neden olacağı moment kadar sisteme fazladan etki oluşur.

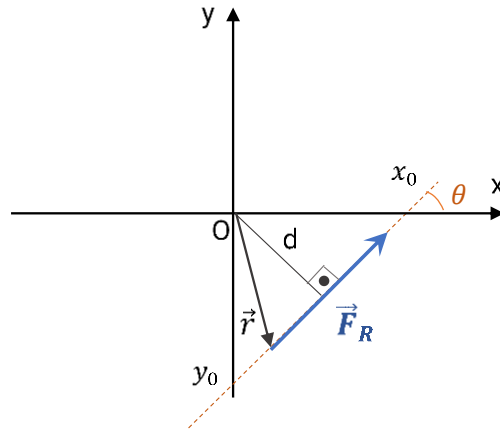
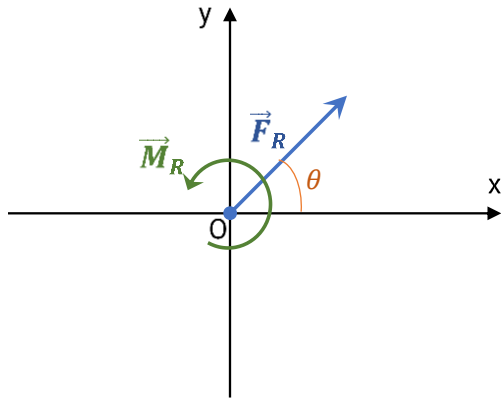
Analiz Prosedürü:

Bir cisim üzerinde etki eden bir dizi kuvveti ve moment O nokasına etki eden eşdeğer bir sistem (tek bir kuvvet ve tek bir moment) haline getirmek istediğimizi varsayalım.

- i. Eğer problemde verilmiyorsa, x ve y eksenini uygun bir yönde belirleyin. İyi bir yönlendirme seçmek çözümü daha basit hale getirir.
- ii. Eğer kuvvet sistemi aynı düzlemdeyse, her kuvveti x ve y bileşenlerine ayırın. Bir bileşen, pozitif x veya y eksenini boyunca yönlendirilmişse, pozitif bir skaleri temsil eder; ancak negatif x veya y eksenini boyunca yönlendirilmişse, negatif bir skalerdir. Sonra tüm kuvvetler aynı noktaya etki ediyor gibi Skaler olarak toplanır (işaretlerine dikkat ederek) ve bileşke kuvvet bulunur.
- iii. Bir düzlem kuvvet sisteminin O noktasındaki momentlerini belirlerken, her kuvvetin bileşenlerinin momentleri bulunarak Skaler olarak toplanır. Bu toplama işlemi sırasında işaret kuralına dikkat etmek önemlidir. Eğer sistemde tekil moment varsa moment toplamına yönleri göz önünde bulundurularak direk olarak dahil edilirler.

5.6. Eşdeğer Sistemin Tek Bir Kuvvete İndirgenmesi

Kuvvet ve moment sistemi eşdeğer tek bir kuvvet ve tek bir momente dönüştürüldükten sonra, elde edilen bu eşdeğer sistem de tek bir kuvvetten oluşan bir eşdeğer sisteme indirgenebilir.



$$\vec{M}_R = \vec{r} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}, \quad \vec{F}_R = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{M}_R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} (r_x F_y - r_y F_x)$$

$$M_R = r_x F_y - r_y F_x$$

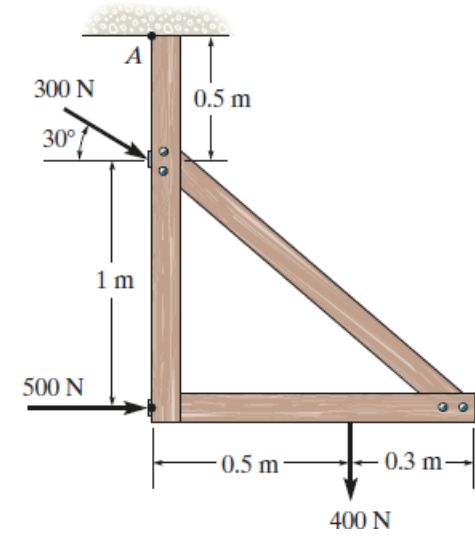
Son deklemdede, $r_x \rightarrow x, r_y \rightarrow y$ değişiklikleri yapılırsa, bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğru denklemi, tek bir kuvvetten oluşan eşdeğer sistemdeki kuvvetin doğrultusunu ifade eden denklemdir.

$$x_0 = \frac{M_R}{F_y}, \quad y_0 = -\frac{M_R}{F_x} \quad (\text{işaretleriyle gerçek değerler}) \quad \text{veya} \quad x_0 = \frac{d}{\sin \theta}, \quad y_0 = \frac{d}{\cos \theta} \quad (\text{mutlak değerler kullanılır, işaretleri}$$

sonra biz eklemeliyiz)

Örnek 3.

Şekildeki kuvvetler sistemini A noktasına taşıyınız.

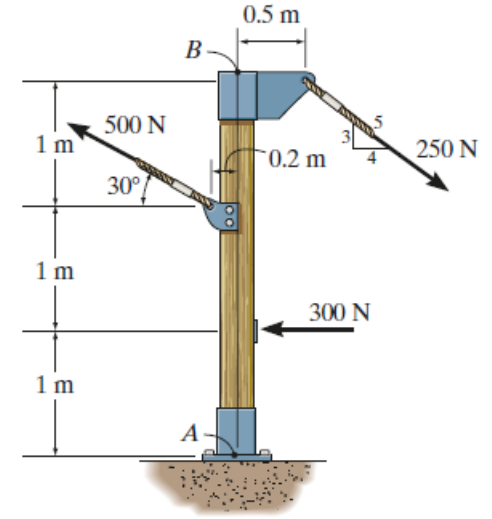


Örnek 4.

Şekilde verilen kuvvetler sistemini

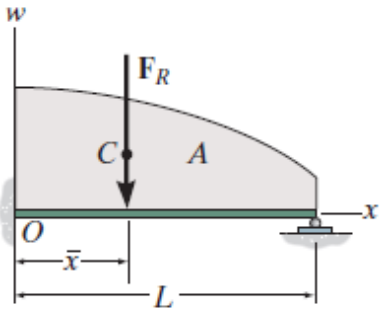
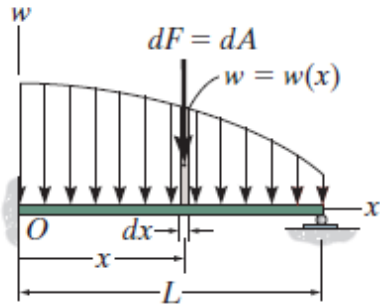
a) A noktasına taşıyınız.

b) Tek bir kuvvet indirgeyerek, kuvvetin doğrultusunun AB direğini B 'den ne kadar uzakta kestiğini bulunuz.



5.7. Yayılı Yüklerin Tekil Yüklere İndirgenmesi

Bazen bir cisim, yüzeyine yayılmış bir yüke maruz kalabilir. Örneğin, bir tabelanın yüzeyine uygulanan rüzgar basıncı, bir tank içindeki suyun basıncı veya bir depo konteynerinin zeminine binen kum ağırlığı, hepsi dağılmış yüklemelerdir. Düzlemde (2D) yayılı yükün birimi $\frac{N}{m}$ 'dir.



Kuvvet sistemi basitleştirme yöntemleri kullanılarak, bu düzlem içi paralel kuvvet sistemi, kiriş üzerinde belirli bir konumda etki eden tek bir eşdeğer bileşke kuvveti ile değiştirilebilir.

Bileşke Kuvvetin Şiddeti

$\vec{F}_R$ sistemin üzerinde etki eden tüm kuvvetlerin toplamıdır. Bu durumda, kiriş üzerinde etki eden sonsuz sayıda paralel kuvvet d(F) olduğu için entegrasyon kullanılmalıdır.

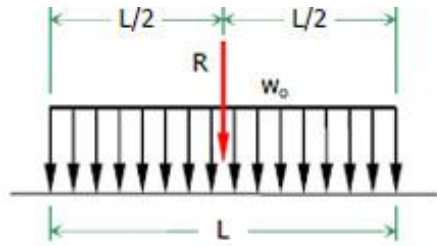
$$+\downarrow \vec{F}_R = \sum \vec{F} = \int_0^L w(x)dx = \int_A dA = A \rightarrow \text{Yayılı yükün altında kalan bölgenin alanı}$$

Bileşke Kuvvetin Konumu

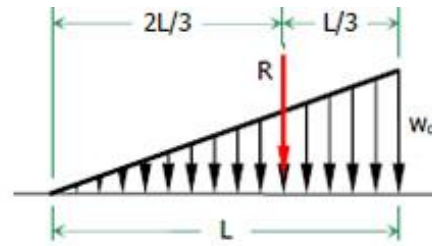
Her iki sistem de birbirine eşit olduğundan, her ikisinin de aynı momentlere sahip olması gerekir. $\vec{F}_R$ kuvvetinin etki çizgisinin konumu $\bar{x}$, kuvvetin bileşkesinin ve paralel kuvvet dağılımının O noktasındaki (y eksen) momentlerini eşitleyerek belirlenebilir.

$$+\curvearrowleft (M_R)_O = -F_R \bar{x} = -\int_0^L w(x)x dx \quad \bar{x} = \frac{\int_0^L w(x)x dx}{\int_0^L w(x) dx}$$

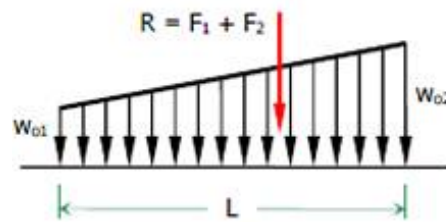
Bazı Yayılı Yükler için Bileşkenin Şiddeti ve Konumu



Rectangular Load

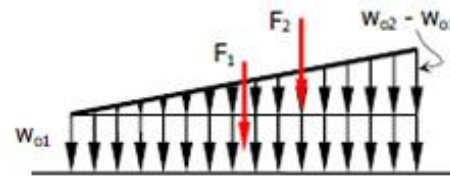


Triangular Load

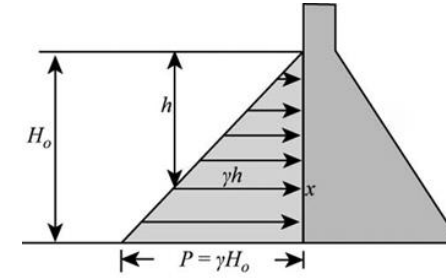


Trapezoidal Load

=



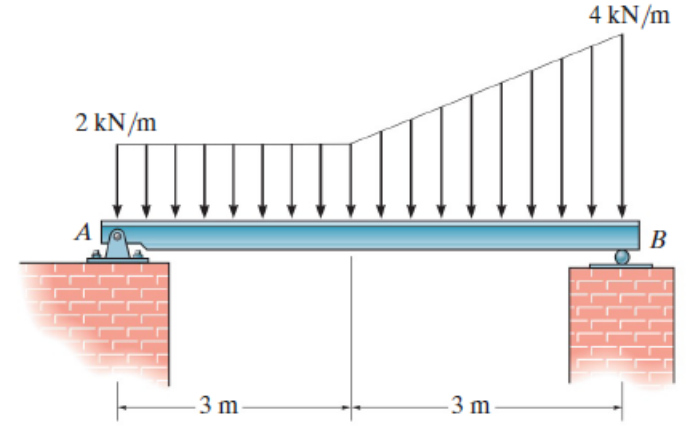
Resolution of trapezoidal load into rectangular and triangular loads



γ is the unit weight
($\frac{N}{m^3}$) of the water.

Örnek 5.

Şekilde verilen yayılı yükleri eşdeğer tek bir tekil kuvvete indirgeyerek, bu kuvvetin kirişi kestiği noktaya A noktasına uzaklığını bulunuz.



Örnek 6.

Şekilde verilen kuvvetler sistemini

- A noktasına taşıyınız.
- Tek bir kuvvet indirgeyiniz (tesir çizgisini bulunuz)

