

BÖLÜM 9. AĞIRLIK MERKEZİ VE ATALET MOMENTLERİ

9.1. Kütle Merkezi ve Bir Cismin Ağırlık Merkezi

Bir cismin bileşke veya toplam ağırlığını ve konumunu bilmek, bu kuvvetin cisim üzerindeki etkisini düşünürken önemlidir. Bu konum noktasına ağırlık merkezi denir, ve bu bölümde düzensiz şekilli bir cismin ağırlık merkezini nasıl bulacağımızı göstereceğiz. Daha sonra, bu yöntemi kütle merkezini ve geometrik merkezi göstermek için genişleteceğiz.

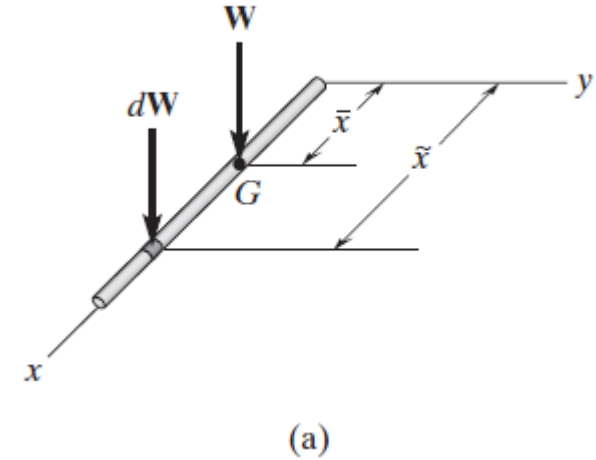
Ağırlık Merkezi

Bir cisim sonsuz sayıda farklı boyuttaki parçacıklardan oluşur, bu nedenle eğer cisim bir yerçekimi alanında bulunuyorsa, o zaman bu parçacıkların her birinin bir ağırlığı dW olacaktır. Bu ağırlıklar paralel bir kuvvet sistemi oluşturur ve bu sistemin sonucu, cismin toplam ağırlığıdır, bu ağırlık merkezi olarak adlandırılan tek bir noktadan geçer, G .

Ağırlık merkezinin konumunu nasıl belirleyeceğimizi göstermek için, Figürdeki çubuğu (a) dikkate alalım, burada dW ağırlığa sahip olan segment, keyfi bir konumda $\bar{x}$ 'de bulunmaktadır.

Çubuğun toplam ağırlığı, tüm parçacıklarının ağırlıklarının toplamıdır, yani

$$+\downarrow F_R = \sum F_z \rightarrow W = \int dW$$



Ağırlık merkezinin, y eksenine etrafındaki momenti, bu aynı ekseninde bulunan tüm parçacıkların ağırlıklarının momentlerinin toplamına eşitlenerek, y eksenine üzerinden ölçülen konumu belirlenir. Bu nedenle,

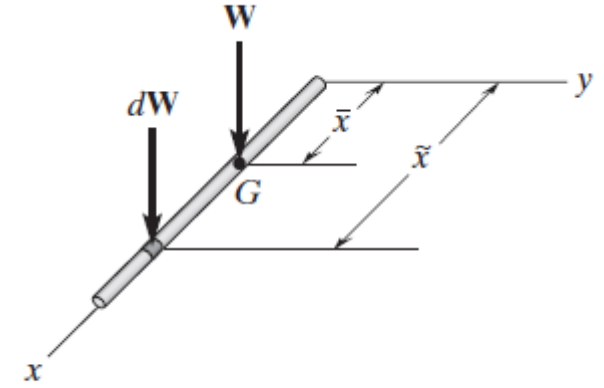
$$(M_R)_y = \sum M_y \rightarrow \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dW}{\int dW}$$

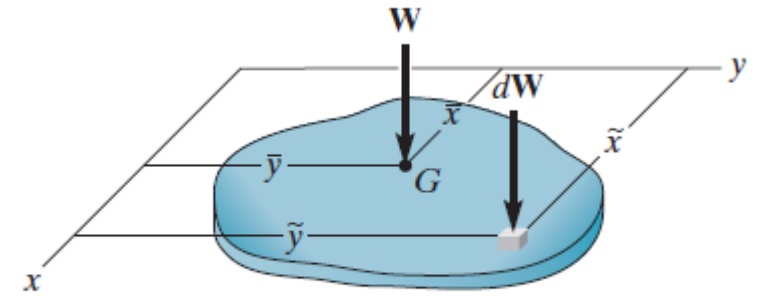
2

Benzer bir şekilde, eğer cisim bir levhayı temsil ediyorsa, Şekil b'de olduğu gibi, merkez $(\bar{x}, \bar{y})$ konumunu belirlemek için bir moment dengesi gereklidir. Bu durumda,

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}dW}{\int dW}$$



(a)

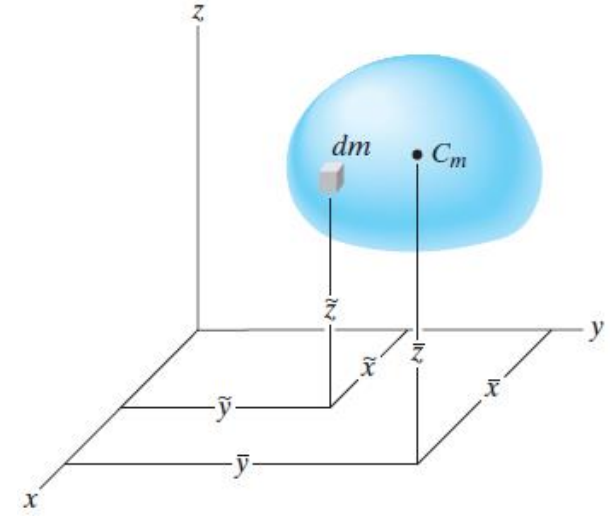


(b)

Kütle Merkezi

Bir cismin dinamik tepkisini veya ivmeli hareketini incelemek için, cismin kütle merkezi C_m 'nin konumunu belirlemek önemlidir. Bu konum, yukarıdaki ifadelere $dW=gdm$ 'yi yerine koyarak bulunabilir. g sabitse, bu ifade içinden çıkar ve böylece

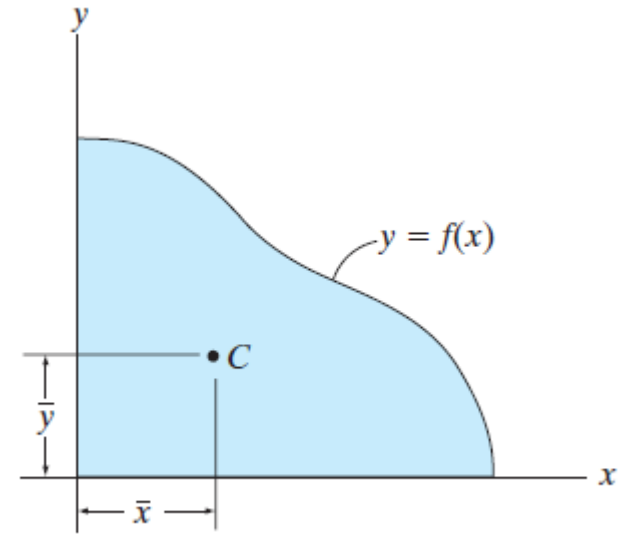
$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm}$$



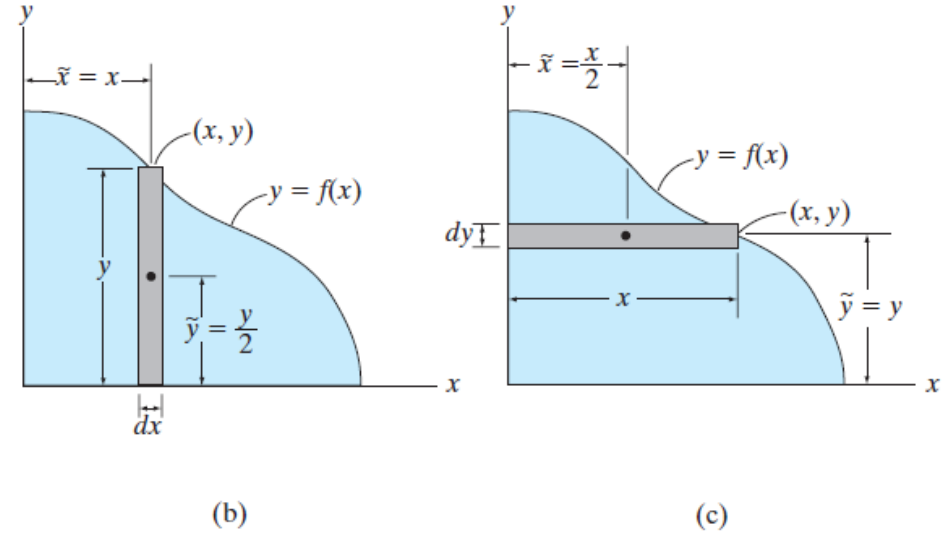
Geometrik Merkez

Eğer bir alan x - y düzleminde ve $y=f(x)$ eğrisiyle sınırlanmışsa, o zaman geometrik merkezi bu düzlemde olacaktır ve şu formülden bulunabilir:

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$



Bu integral, bir dikdörtgen şerit kullanılarak tek bir entegrasyon yaparak değerlendirilebilir. Örneğin, dikey bir şerit kullanılıyorsa, Şekil b'de olduğu gibi, elemanın alanı $dA=ydx$ olur ve merkezi $\tilde{x}=x$ ve $\tilde{y}=y/2$ konumundadır. Eğer yatay bir şerit düşünüyorsak, Şekil c'de olduğu gibi, $dA=xdy$ olur ve merkezi $\tilde{x}=x/2$ ve $\tilde{y}=y$ konumundadır.

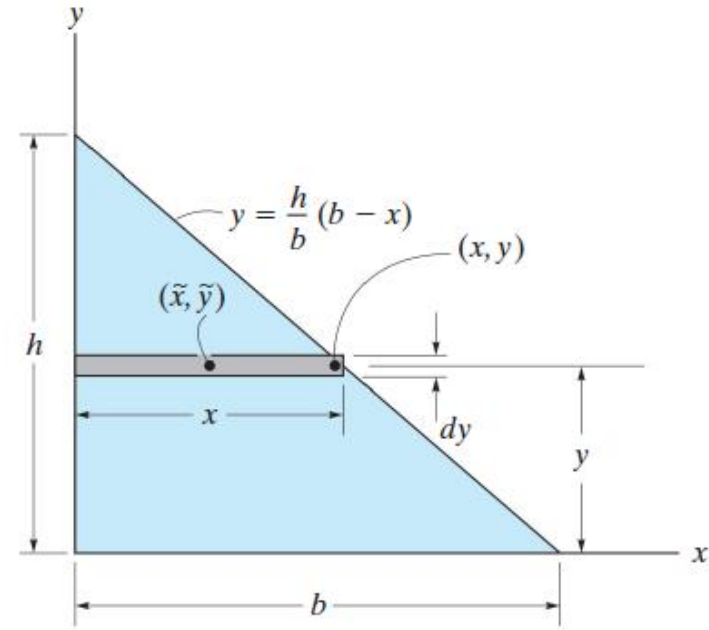


Önemli Noktalar

- Geometrik Merkez, cismin oluşturan malzeme homojen ise, kütle merkezi veya ağırlık merkeziyle aynı noktaya denk gelir.
- Ağırlık merkezini veya merkezini bulmak için kullanılan formüller, sistemdeki tüm parçaların momentlerinin toplamı ile sistemin "bileşke" momenti arasında bir dengeyi temsil eder.
- Geometrik merkez simetri eksenini üzerindedir.

Örnek 1.

Verilen şeklin ağırlık merkezini bulunuz.



9.2. Birleşik Cisimlerin Ağırlık Merkezi

Bir kompozit gövde, dikdörtgen, üçgen, yarı daire şeklinde olabilecek bağlı "daha basit" şekilli gövdeler dizisinden oluşur.

Bu tür bir gövde genellikle bileşik parçalara bölünebilir veya bölünebilir, ve her bir parçanın ağırlığı ve ağırlık merkezinin konumu bilindiğinde, tüm gövdenin ağırlık merkezini belirlemek için entegrasyon gereksinimini ortadan kaldırabiliriz.

Bunu yapmanın yöntemi, öncekilerde açıklandığı gibi aynı prosedürü izler; ancak, sonsuz sayıda diferansiyel ağırlığı hesaba katmak yerine, sonlu sayıda ağırlığımız vardır.

Bu nedenle,

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W}$$

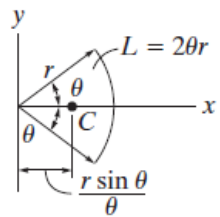
Burada

$\bar{x}, \bar{y}$ kompozit gövdenin ağırlık merkezi G'nin koordinatlarını temsil eder.

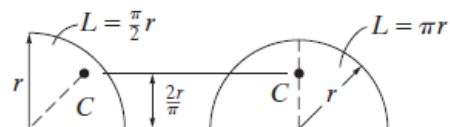
$\tilde{x}, \tilde{y}$ gövdenin her bir bileşik parçasının ağırlık merkezinin koordinatlarını temsil eder.

W , gövdenin tüm bileşik parçalarının ağırlıklarının toplamı veya sadece gövdenin toplam ağırlığıdır.

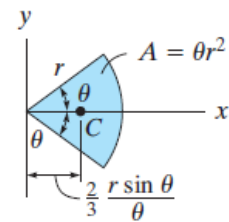




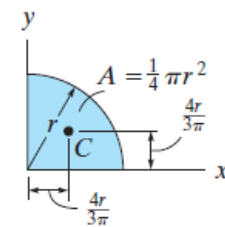
Circular arc segment



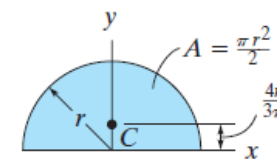
Quarter and semicircle arcs



Circular sector area

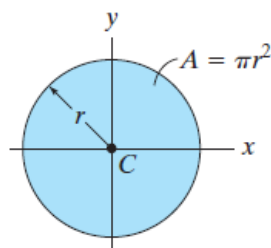


Quarter circle area

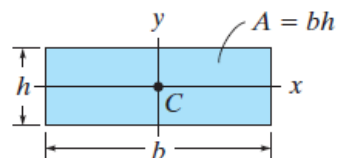


Semicircular area

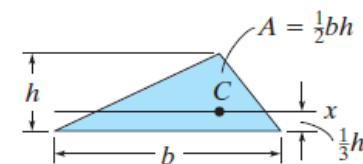
7



Circular area



Rectangular area



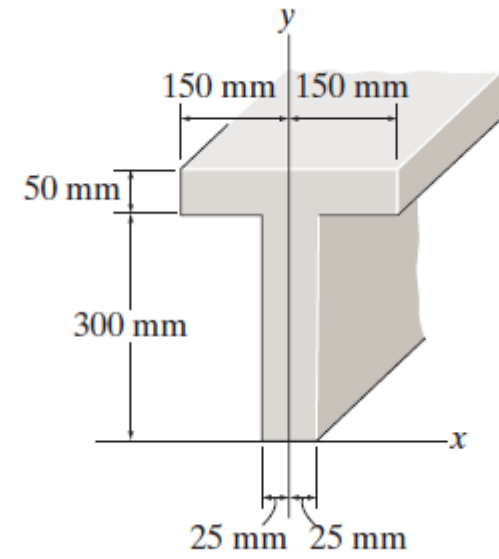
Triangular area

Analiz Prosedürü

- Bir çizim kullanarak, gövde veya nesneyi daha basit şekillere sahip birkaç bileşik parçaya ayırın.
- Bir bileşik gövde bir deliğe veya malzemesi olmayan bir geometrik bölgeye sahipse, deliksiz bileşik gövdeyi dikkate alın ve deliği negatif ağırlığa veya boyuta sahip ek bir bileşik parça olarak düşünün.
- Çizim üzerinde koordinat eksenlerini belirleyin ve her parçanın ağırlık merkezi veya merkezi koordinatlarını belirleyin.
- Ağırlık merkezi denklemlerini uygulayarak gövdenin ağırlık merkezi koordinatlarını belirleyin.
- Bir nesne bir eksen etrafında simetrikse, nesnenin ağırlık merkezi bu ekseninde bulunur.
- İstenirse, hesaplamalar tablo formunda düzenlenebilir.

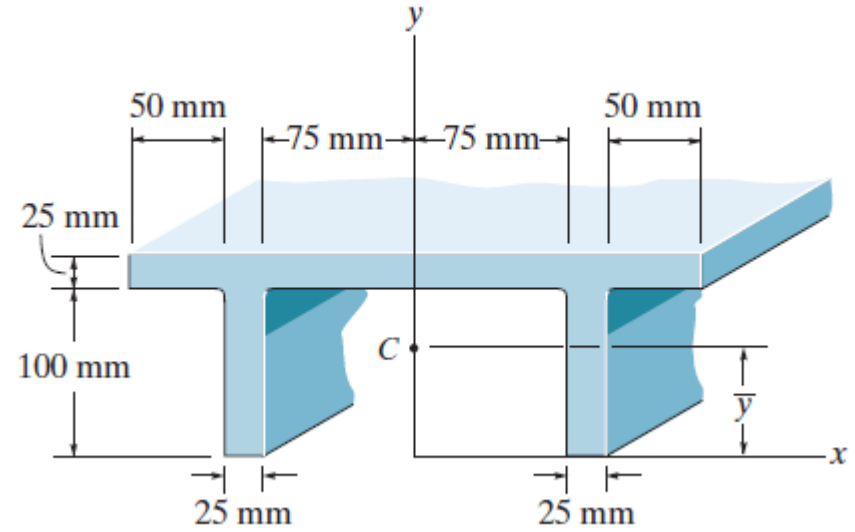
Örnek 2.

Verilen şeklin ağırlık merkezini bulunuz.



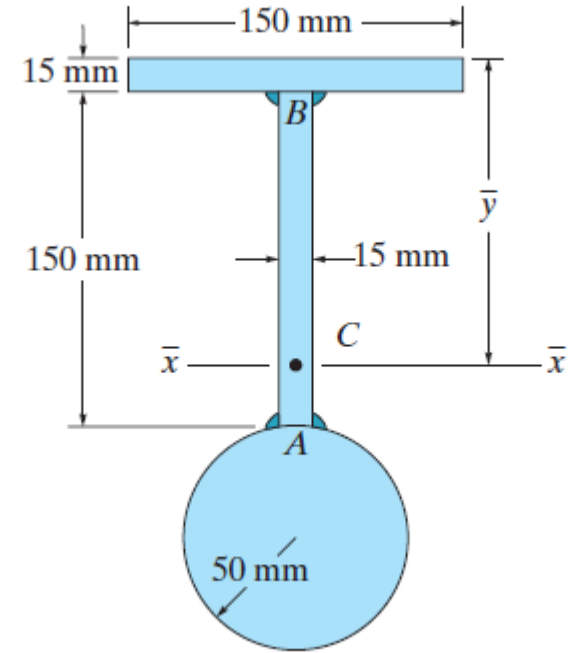
Örnek 3.

Verilen şeklin ağırlık merkezini bulunuz.



Örnek 4.

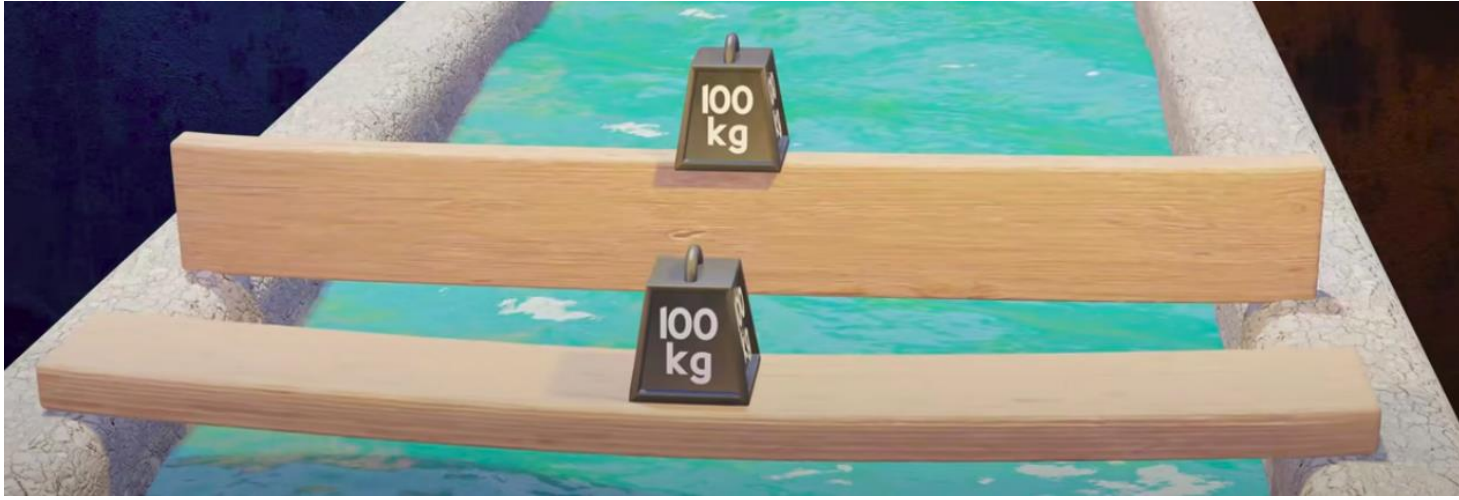
Verilen şeklin ağırlık merkezini bulunuz.



9.3. Atalet Momentleri

Aşağıdaki şekildeki kirişlere bakın. Boyutları aynı ve izotropiktirler. Aynı kesitlere sahipler ve tek farkları yönlendirilmiş olmalarıdır.

Aynı yük taşıma kapasitesine sahip mi? Hangi yönlendirme daha fazla yük taşır?"



12

Atalet momenti veya alanın ikinci momenti, bir alanın geometrik bir özelliğidir ve noktalarının bir belirsiz eksenle ilişkili olarak nasıl dağıldığını yansıtır. Alanın ikinci momenti genellikle ya I (alanın düzlemi üzerinde olan bir eksen için) ya da J (düzleme dik olan bir eksen için) ile gösterilir. Atalet momenti doğrudan bir yapı elemanının moment yükleme kapasitesini etkiler.

13

Tanım gereği, x ve y eksenleri etrafındaki bir diferansiyel alanın dA momentleri $dI_x = y^2 dA$ ve $dI_y = x^2 dA$ 'dır. Tüm alan A'nın atalet momentleri integral ile belirlenir.

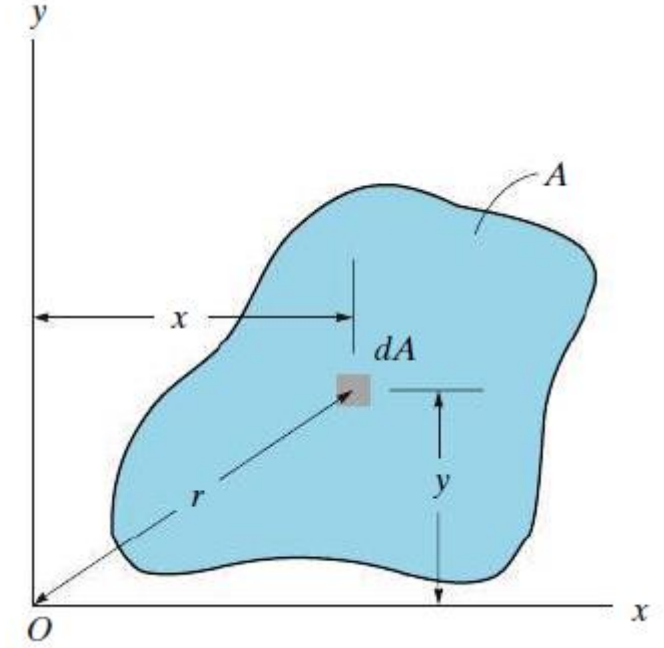
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Bu miktarı dA'nın "kutup" O veya z ekseni etrafındaki momenti için de formüle edebiliriz. Bu, kutupsal atalet momenti olarak adlandırılır. Bu, r'yi kutba (z ekseni) olan dik uzaklık olarak tanımlar ve dA elemanından kutba olan dik uzaklık olarak belirlenir. Tüm alan için kutupsal atalet momenti şu şekildedir:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

J_O ve I_x, I_y arasındaki bu ilişki, $r^2 = x^2 + y^2$ olduğu için mümkündür.



Yukarıdaki formüllerden, I_x, I_y ve J_O 'nun, mesafe karesi ve alanın çarpımını içerdiği için her zaman pozitif olacağı görülür.

Ayrıca, atalet momenti birimleri, dördüncü kuvvet olarak uzunluğu içerir, örneğin, m^4, mm^4 .

9.3. Paralel Eksen Teoremi

Paralel-eksen teoremi, merkez yolu geçen bir eksene paralel herhangi bir eksene ait bir alanın atalet momentini bulmak için kullanılabilir.

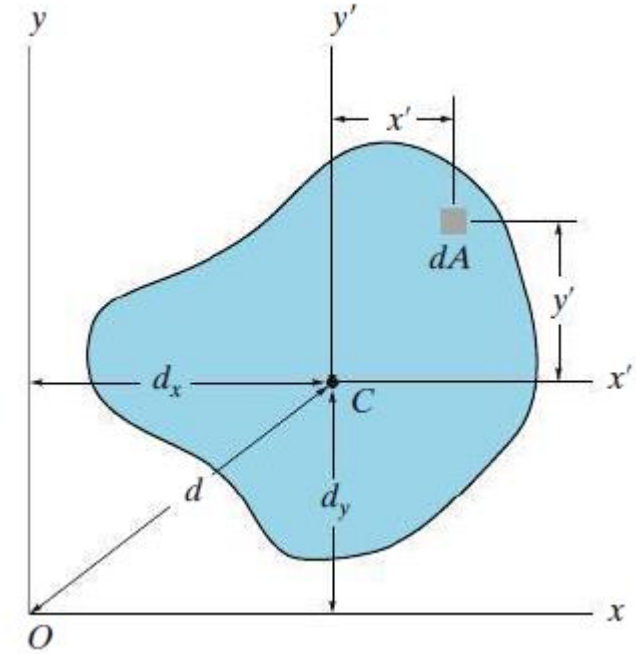
Bu teoremi geliştirmek için, gölgeli alanın x eksenine göre atalet momentini bulmayı düşünelim.

Başlamak için, merkezi x' eksenini boyunca olan bir eksene göre paralel bir mesafede yer alan farklısözde bir eleman dA seçeriz. Paralel x ve x' eksenleri arasındaki mesafe dy ise, dA'nın x eksenine göre atalet momenti is $dI_x = (y' + dy)^2 dA$ olur. Tüm alan için,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A (y' + d_y)^2 dA \\ &= \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA \end{aligned}$$

İlk integral, alanın ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentini temsil eder. İkinci integral sıfırdır çünkü x' ağırlık merkezi C'nin içinden geçer. Üçüncü integral, toplam alanı A'yı temsil ettiğinden, sonuç olarak elde edilir.

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$



Benzer şekilde,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2$$

1.4 Alanın Atalet Yarıçapı

Bir alanın eksen etrafındaki atalet yarıçapı, uzunluk birimine sahiptir ve yapısal mekanikte sütunların tasarımında sıkça kullanılan bir miktar. Alanlar ve atalet momentleri bilindiği takdirde, atalet yarıçaplar aşağıdaki formüllerle belirlenir:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

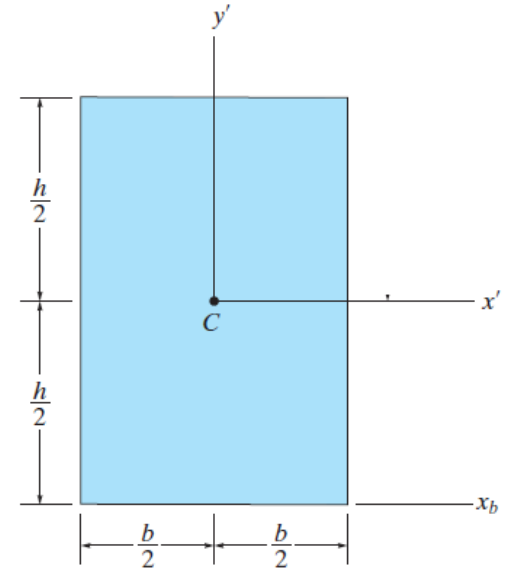
16

Bu denklemlerin formu, bir alanın bir eksen etrafındaki atalet momentini bulma formülüne benzediği için kolayca hatırlanabilir. Örneğin, $I_x = k_x^2 A$; fakat bir diferansiyel alan için, $dI_x = y^2 dA$.

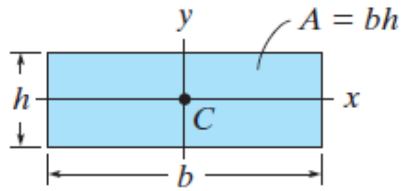
Örnek 5.

Dikdörtgen alanın momenti aşağıdaki eksene göre belirleyiniz.

- (a) Geometrik merkezden geçen x' eksenine,
- (b) Geometrik merkezden geçen y' eksenine,
- (c) Dikdörtgenin tabanından geçen x_b eksenine boyunca,



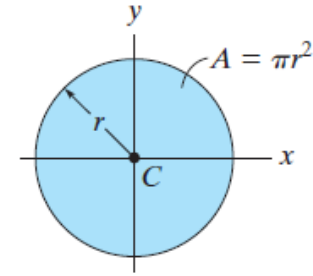
Bazı temel alanların atalet momentleri



Rectangular area

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

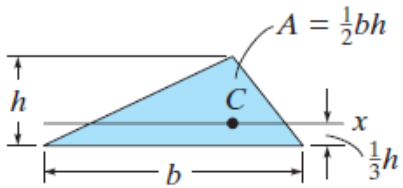


Circular area

$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

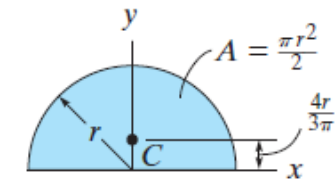
$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

18



Triangular area

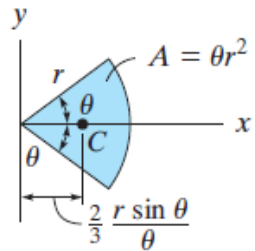
$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$



Semicircular area

$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

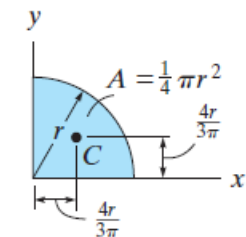
$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$



Circular sector area

$$I_x = \frac{1}{4}r^4 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$I_y = \frac{1}{4}r^4 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$



Quarter circle area

$$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$$

9.2. Birleşik Alanların Atalet Momentleri

Bir bileşik alan, dikdörtgenler, üçgenler ve daireler gibi bir dizi bağlı "daha basit" parçadan veya şekilden oluşur. Her bir parçanın atalet momentinin bilindiği veya ortak bir eksene göre belirlenebildiği takdirde, bu eksene göre bileşik alanın atalet momenti, tüm parçalarının atalet momentlerinin cebirsel toplamına eşittir.

Örneğin, şekildeki T-kiriş, iki dikdörtgen elemanın birleştirilmesiyle oluşur.



Analiz Prosedürü

Bir bileşik alanın bir referans ekseni etrafındaki atalet momenti, aşağıdaki prosedür kullanılarak belirlenebilir.

Bileşik Parçalar.

Bir eskiz kullanarak alanı bileşik parçalara ayırın ve her bir parçanın merkezine olan dik mesafeyi referans eksene gösterin.

Paralel Eksen Teoremi.

20

Her bir parça için merkezi eksen referans ekseni ile örtüşmüyorsa, parçanın referans ekseni etrafındaki atalet momenti belirlenirken, paralel eksen teoremi kullanılmalıdır.

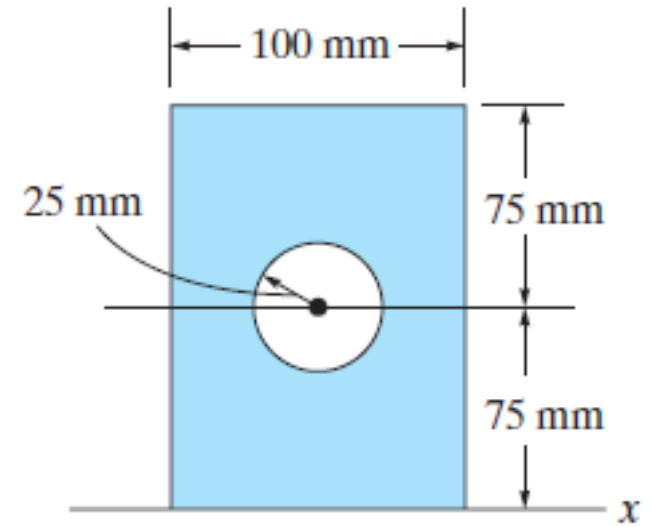
Toplama.

Tüm alanın referans ekseni etrafındaki atalet momenti, bu eksene göre bileşik parçaların sonuçlarının toplanmasıyla belirlenir.

Bir bileşik parçada boş bir bölge (delik) varsa, bu bölgenin atalet momenti, bu bölgeyi de içeren parçanın toplam atalet momentinden bu bölgenin atalet momentinin çıkarılmasıyla bulunur.

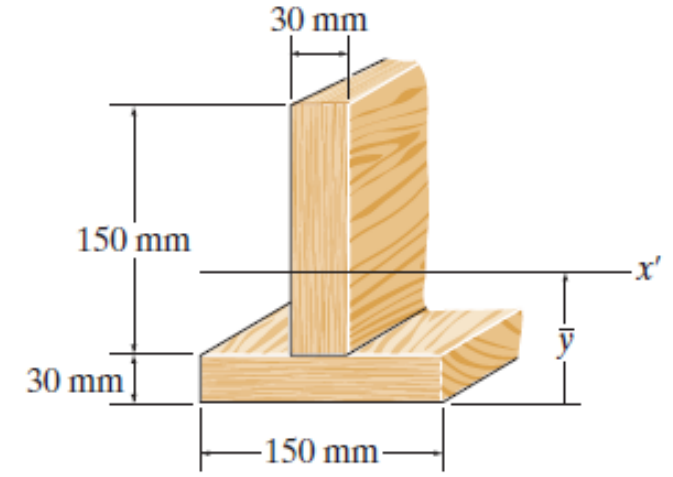
Örnek 6.

Verilen alanın x eksenine göre atalet momentini bulunuz.



Örnek 6.

Verilen kesitin ağırlık merkezinden geçen x' eksenine göre atalet momentini bulunuz.



Örnek 7.

Verilen kesitin ağırlık merkezinden geçen x' ve y' eksenlerine göre atalet momentini bulunuz.

