

### 5.1.2 Simpson Kuralları

Trapez kuralını daha sık aralıkla uygulamaktan başka, integrali daha doğru hesaplamak için diğer bir yol, noktaları birleştirmek için daha yüksek dereceli polinomlar kullanmaktır. Örneğin  $f(a)$  ve  $f(b)$  noktaları arasında bilinen ek bir nokta varsa, bu üç nokta bir parabolle birleştirilebilir. Eğer  $f(a)$  ve  $f(b)$  noktaları arasında bilinen ek iki nokta varsa, bu dört nokta bir üçüncü derece polinomla birleştirilebilir (Şekle bkz.). Bu polinomlar altında kalan integralleri veren formüller Simpson kuralları olarak bilinir.

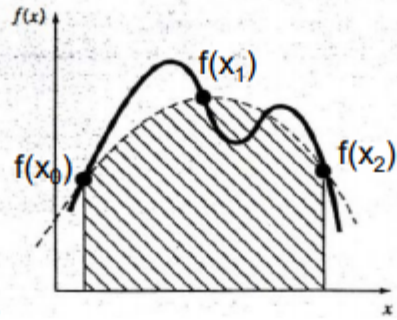
Trapez yöntemine göre alan hesabı daha sık aralıklarla yapılır.

Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.

**Simpson yöntemi** daha doğru integral hesabı için, noktaları birleştirmek amacıyla daha yüksek dereceli polinomlar kullanmaktır.

### ❑ 1/3 Kuralı

- **f(a)** ve **f(b)** noktaları arasında bilinen ek bir nokta var ise, bu üç nokta bir parabol ile birleştirilebilir.

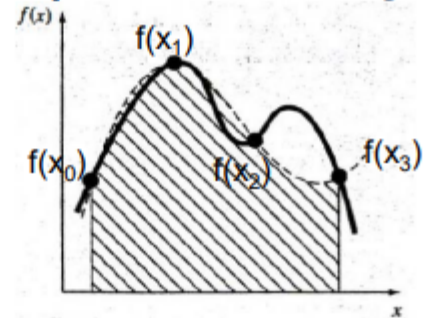


$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Taban}} \underbrace{\frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{6}}_{\text{Ortalama yükseklik}}$$

### ❑ 3/8 Kuralı

- **f(a)** ve **f(b)** noktaları arasında eşit aralıklı iki nokta var ise, bu dört nokta üçüncü dereceden (kübik) bir polinom ile birleştirilebilir.



$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Taban}} \underbrace{\frac{[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}{8}}_{\text{Ortalama yükseklik}}$$

### 5.1.2.1 Simpson 1/3 Kuralı

Simpson 1/3 kuralı, (5.1)'e ikinci dereceden bir interpolasyon polinomu konulmasıyla elde edilir.  $n = 2$  için daha önce verilen polinomda  $x_0 = a$  ve  $x_2 = b$  yazılır ve bu ifade (5.1) de yerine koyulursa

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx \quad (5.9)$$

Bu ifade düzenlenirse

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (5.10)$$

Burada  $h = (b-a)/2$  dir.

Trapez kuralında olduğu gibi, Simpson kuralı da, integral aralığı eşit genişlikteki alt aralıklara bölünerek iyileştirilebilir. Toplam integral aşağıdaki gibi yazılabilir.

Her bir integral için Simpson'un 1/3 kuralının uygulanmasıyla

$$I \cong h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{3} + h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{3} \\ + \dots + h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{3}$$

Bu ifadede  $f(x_0) = f_0$  ve  $f(x_n) = f_n$  denilirse

$$I = \frac{h}{3} \left[ f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f_i + f_n \right]$$

(5.12)

## ***Uygulama-1***

Aşağıda verilen integrali  $n=10$  alarak Simpson 1/3 kuralı ile hesaplayınız.

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

## ***Uygulama-2***

Aşağıda verilen integrali  $n=4$  alarak Simpson  $1/3$  kuralı ile hesaplayınız.

$$I = \int_{-4}^6 (4x + 8)^3 dx$$

### 5.1.2.2 Simpson 3/8 Kuralı

Trapez ve Simpson 1/3 kurallarının türetilmesine benzer şekilde, üçüncü dereceden bir Lagrange polinomu dört noktadan geçirilebilir ve integre edilebilir.

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_3(x) dx$$

integrali alınırsa

$$I = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (5.13)$$

Burada  $h = (b - a) / 3$  tür. Bu kuralın uygulanabilmesi için, aralık sayısının üçe bölünebilmesi gerekir. Simpson 3/8 kuralının çoklu uygulaması aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$I = \frac{3h}{8} \left[ f_0 + 3 \sum_{i=1,4,7,\dots}^{n-1} f_i + 3 \sum_{i=2,5,8,\dots}^{n-2} f_i + 2 \sum_{i=3,6,9,\dots}^{n-3} f_i + f_n \right] \quad (5.14)$$

## ***Uygulama-1***

Aşağıda verilen integrali  $n=6$  alarak Simpson 3/8 kuralı ile hesaplayınız.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \sin x)^2} dx$$



# BÖLÜM-5-6

## Sayısal İntegral ve Türev

*Tablo 5.4 İleri fark bölünmüş sonlu fark formülleri*

|                                                                                                                     |   |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|
| $f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$                                                                       | ★ | $O(h)$   |
| $f'(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$                                                      |   | $O(h^2)$ |
| $f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$                                                      | ★ | $O(h)$   |
| $f''(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$                                      |   | $O(h^2)$ |
| $f'''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$                                       |   | $O(h)$   |
| $f'''(x_i) \cong \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{h^3}$                   |   | $O(h^2)$ |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$                      |   | $O(h)$   |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$ |   | $O(h^2)$ |

*Tablo 5.5 Geri fark bölünmüş sonlu fark formülleri*

|                                                                                                                     |   |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|
| $f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$                                                                       | ★ | $O(h)$   |
| $f'(x_i) \cong \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$                                                       |   | $O(h^2)$ |
| $f''(x_i) \cong \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$                                                     | ★ | $O(h)$   |
| $f''(x_i) \cong \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$                                      |   | $O(h^2)$ |
| $f'''(x_i) \cong \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3}$                                      |   | $O(h)$   |
| $f'''(x_i) \cong \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4}))}{h^3}$                   |   | $O(h^2)$ |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4}))}{h^4}$                     |   | $O(h)$   |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5}))}{h^4}$ |   | $O(h^2)$ |

*Tablo 5.6 Merkezi fark bölünmüş sonlu fark formülleri*

|                                                                                                                                   |   |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|
| $f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$                                                                               | ★ | $O(h)$   |
| $f'(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$                                                 |   | $O(h^2)$ |
| $f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$                                                                   | ★ | $O(h)$   |
| $f''(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{h^3}$                                   |   | $O(h^2)$ |
| $f'''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{h^3}$                                                |   | $O(h)$   |
| $f'''(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{h^4}$                 |   | $O(h^2)$ |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$                                   |   | $O(h)$   |
| $f^{(4)}(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^4}$ |   | $O(h^2)$ |

## ***Uygulama-1***

$y = x^3$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki türevini  $h=0.01$  olarak bulunuz.

## ***Uygulama-2***

$f(x) = x \sin x + e^{2x} \tan x$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki türevini Newton merkezi fark formülü ile  $h=0.01$  alarak bulunuz.

## ***Uygulama-3***

$y = x^3$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki ikinci türevini  $h=0.01$  alarak bulunuz.  
(Newton merkezi fark yöntemi ile)

**Uygulama-4:**  $f(x) = x \sin x + e^{2x} \tan x$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki ikinci türevini  $h=0.02$  olarak bulunuz.

**Uygulama-5:**

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki ikinci türevini  $h=0.1$  olarak

bulunuz.





# Sınıf İçi Uygulamalar

# Uygulama-1

$f(x)=e^{2x-3}$  fonksiyonunun  $x=2$  noktasındaki türevini  $h=0.2$  adımlar ile ileri fark, geri fark ve merkezi fark yöntemleriyle hesaplayınız.

Sonuçlar:

- ☐ Geri farklar: 4.4808
- ☐ İleri farklar: 6.6846
- ☐ Merkezi farklar: 5.5827

# Uygulama-2

$f(x)=\int_0^3 x^2 \cos x \, dx$  fonksiyonunun integrali  $n=6$  olarak

- Trapez kuralı
- Simpson 1/3 kuralı

ile hesaplayınız.

Sonuç: -4.936

# Uygulama-3

Aşağıda verilen denklem takımının köklerini Ardışık Yaklaşım Yöntemini kullanarak  $x_0 = 1$  ve  $y_0=1$  başlangıç şartları ve  $\varepsilon=0.01$  hata oranıyla hesaplayınız.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\x^2 - y^2 &= 1\end{aligned}$$

# Uygulama-4

Aşağıda verilen matrisin tersini Gauss-Jordan yöntemiyle hesaplayınız.

`a =`

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 6 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 5 |

`b =`

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| 0.3906  | -0.0938 | -0.0625 | -0.1250 |
| -0.0938 | 0.3125  | -0.1250 | 0       |
| -0.0625 | -0.1250 | 0.2500  | 0       |
| -0.1250 | 0       | 0       | 0.2500  |