

İÇİNDEKİLER

- 1. Giriş, Hata Analizi ✓
- 2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma ✓
 - 2.1. Kapalı Yöntemler ✓
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi ✓
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi ✓
 - 2.2. Açık Yöntemler ✓
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi ✓
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi ✓
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi ✓

İÇİNDEKİLER

1. Giriş, Hata Analizi
2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma
 - 2.1. Kapalı Yöntemler
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi
 - 2.2. Açık Yöntemler
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi
3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 3.1. Direkt Yöntemler
 - 3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi
 - 3.1.2. Pivottlama
 - 3.1.3. Gauss-Jordan Yöntemi
 - 3.1.4. LU / LDU Yöntemleri
 - 3.1.5. Cholesky Yöntemi

- 3.2. Bir Matrisin Tersi
 - 3.3. Ardışık Yaklaşım Yöntemleri
 - 3.3.1. Jacobi Yöntemi
 - 3.3.2. Gauss-Seidel Yöntemi
4. Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 4.1. Ardışık Yaklaşım Yöntemi
 - 4.2. Newton-Raphson Yöntemi
5. Sayısal Türev
6. Sayısal İntegral
 - 6.1. Trapez Kuralı
 - 6.2. Simpson Kuralı

The background of the slide features a close-up of a hand holding a pen, poised to write on a surface. Below the hand, a portion of a computer keyboard is visible. Overlaid on the entire scene is a pattern of binary code (0s and 1s) in a light blue color, creating a digital or technological theme.

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

3.1 Giriş

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir lineer denklem takımının genel şekli aşağıda verilmektedir.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$



$$[A]\{x\} = \{b\}$$

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir lineer denklem takımının matris halinde gösterilimi ise aşağıdaki gibidir.

$$[A]\{x\} = \{b\}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_i \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_i \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Katsayılar Matris

*Bilinmeyenler
Vektörü*

*Yük
Vektörü*

Lineer denklem sistemlerinin sayısal çözüm yöntemleri:

- ✓ *Direkt yöntemler*
- ✓ *Ardışık yaklaşım yöntemleri*

olarak iki grupta incelenebilir.

Direkt çözüm yöntemlerinde çözüm sonlu sayıda adımla elde edilir. ***Ardışık yaklaşım yöntemlerinde*** ise bilinmeyenler için başlangıç değerleri seçilir ve bu değerlere bağlı olarak bilinmeyenler yeniden hesaplanır. İşleme bu şekilde devam edilerek bilinmeyenler için sonsuz terimli bir çözüm dizisi elde edilir. Eğer bu dizi, sonsuzda bir değere yakınsıyorsa çözüm budur, aksi halde dizi bir yerde kesilerek yaklaşık çözüm elde edilir. Dizinin bir değere yakınsamaması çözüm olmadığını göstermez; yeni başlangıç değerleri ile çözüm tekrarlanır.



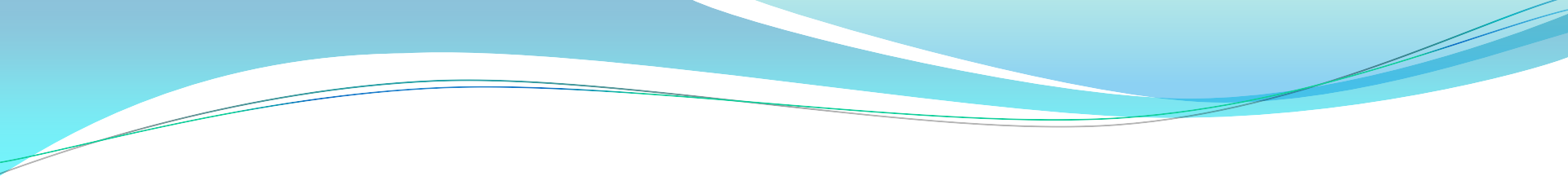
3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi

Bir lineer denklem takımını genel olarak

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1i}x_i \cdots + a_{1j}x_j \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2i}x_i \cdots + a_{2j}x_j \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \cdots + a_{3i}x_i \cdots + a_{3j}x_j \cdots + a_{3N}x_N &= b_3 \\
 \dots &\dots \\
 a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 &+ a_{ii}x_i &+ a_{ij}x_j &+ a_{iN}x_N = b_i \\
 \dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots \\
 a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 &+ a_{ji}x_i &+ a_{jj}x_j &+ a_{jN}x_N = b_j \\
 \dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots &\dots \\
 a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 \cdots + a_{Ni}x_i \cdots + a_{Nj}x_j \cdots + a_{NN}x_N &= b_N
 \end{aligned}$$

veya matris formda

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3N} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ii} & & a_{ij} & & a_{iN} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & & a_{ji} & & a_{jj} & & a_{jN} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{Ni} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_N \end{Bmatrix}$$



Gauss eliminasyon yöntemiyle bir denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi üç adımda yapılır:

- i. Birinci satır a_{11} 'e bölünerek $a_{11}=1$ elde edilir,
- ii. Diğer satırların ilk elemanları sıfırlanır. Bu adımda, bilinmeyenler elimine edilerek denklem seti bir üst üçgen matris haline getirilir.
- iii. Üst üçgen matrisin son denkleminde başlayarak bilinmeyenler bulunur.

➤ *Üst-üçgenselleştirme aşaması*

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

➤ Üst-üçgenselleştirme aşaması

Lineer denklem sistemindeki *denklemlerden herhangi birinin iki tarafının sıfırdan farklı bir sayıyla bölünmesi* veya *çarpılması* denklemi değiştirmez. Yine bu *denklemlerden ikisinin birbiriyle toplanması* veya *çıkartılması* lineer denklem takımının çözümünü değiştirmez.

Buna göre denklem sistemindeki *birinci denklemin her iki tarafı a_{11} ile bölündükten sonra*

- a_{21} ile çarpılıp ikinci denklemden çıkartılarak
- a_{31} ile çarpılıp üçüncü denklemden çıkartılarak

.....

- a_{i1} ile çarpılıp i 'inci denklemden çıkartılarak

.....

- a_{N1} ile çarpılıp N 'inci denklemden çıkartılarak

katsayılar matrisi bu hale getirilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3i}^{(2)} & \dots & a_{3j}^{(2)} & \dots & a_{3N}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ii}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{iN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{j2}^{(2)} & a_{j3}^{(2)} & \dots & a_{ji}^{(2)} & \dots & a_{jj}^{(2)} & \dots & a_{jN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{N2}^{(2)} & a_{N3}^{(2)} & \dots & a_{Ni}^{(2)} & \dots & a_{Nj}^{(2)} & \dots & a_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \dots \\ b_i^{(2)} \\ \dots \\ b_j^{(2)} \\ \dots \\ b_N^{(2)} \end{Bmatrix}$$

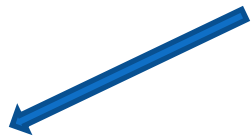
Benzeri işlemler *ikinci denklem* ile sonraki denklemler arasında tekrarlanarak denklem sistemi;

$$\begin{bmatrix}
 a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\
 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\
 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3i}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & a_{i3}^{(3)} & & a_{ii}^{(3)} & & a_{ij}^{(3)} & & a_{iN}^{(3)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & a_{j3}^{(3)} & & a_{ji}^{(3)} & & a_{jj}^{(3)} & & a_{jN}^{(3)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & a_{N3}^{(3)} & \dots & a_{Ni}^{(3)} & \dots & a_{Nj}^{(3)} & \dots & a_{NN}^{(3)}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \dots \\ b_i^{(3)} \\ \dots \\ b_j^{(3)} \\ \dots \\ b_N^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3i}^{(2)} & \dots & a_{3j}^{(2)} & \dots & a_{3N}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ii}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{iN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{j2}^{(2)} & a_{j3}^{(2)} & \dots & a_{ji}^{(2)} & \dots & a_{jj}^{(2)} & \dots & a_{jN}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{N2}^{(2)} & a_{N3}^{(2)} & \dots & a_{Ni}^{(2)} & \dots & a_{Nj}^{(2)} & \dots & a_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \dots \\ b_i^{(2)} \\ \dots \\ b_j^{(2)} \\ \dots \\ b_N^{(2)} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3i}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{i3}^{(3)} & \dots & a_{ii}^{(3)} & \dots & a_{ij}^{(3)} & \dots & a_{iN}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{j3}^{(3)} & \dots & a_{ji}^{(3)} & \dots & a_{jj}^{(3)} & \dots & a_{jN}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{N3}^{(3)} & \dots & a_{Ni}^{(3)} & \dots & a_{Nj}^{(3)} & \dots & a_{NN}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \dots \\ b_i^{(3)} \\ \dots \\ b_j^{(3)} \\ \dots \\ b_N^{(3)} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{3N}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & a_{kj}^{(k)} & a_{kN}^{(k)} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ik+1}^{(k+1)} & a_{ij}^{(k+1)} & a_{iN}^{(k+1)} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{Nk+1}^{(k+1)} & a_{Nj}^{(k+1)} & a_{NN}^{(k+1)} & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \dots \\ b_i^{(k)} \\ \dots \\ b_j^{(k+1)} \\ \dots \\ b_N^{(k+1)} \end{Bmatrix}$$

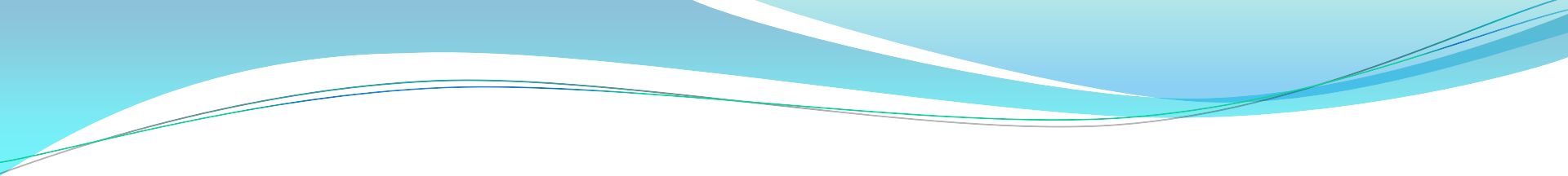


$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

Geri Süpürme aşaması ile bilinmeyenler en alt satırdan başlanarak sırayla bulunur.

$$\begin{bmatrix}
 a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\
 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2N}^{(2)} \\
 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3i}^{(3)} & \dots & a_{3j}^{(3)} & \dots & a_{3N}^{(3)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ii}^{(i)} & \dots & a_{ij}^{(i)} & \dots & a_{iN}^{(i)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{jj}^{(j)} & \dots & a_{jN}^{(j)} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{NN}^{(N-1)}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \dots \\ b_i^{(i)} \\ \dots \\ b_j^{(j)} \\ \dots \\ b_N^{(N-1)} \end{Bmatrix}$$

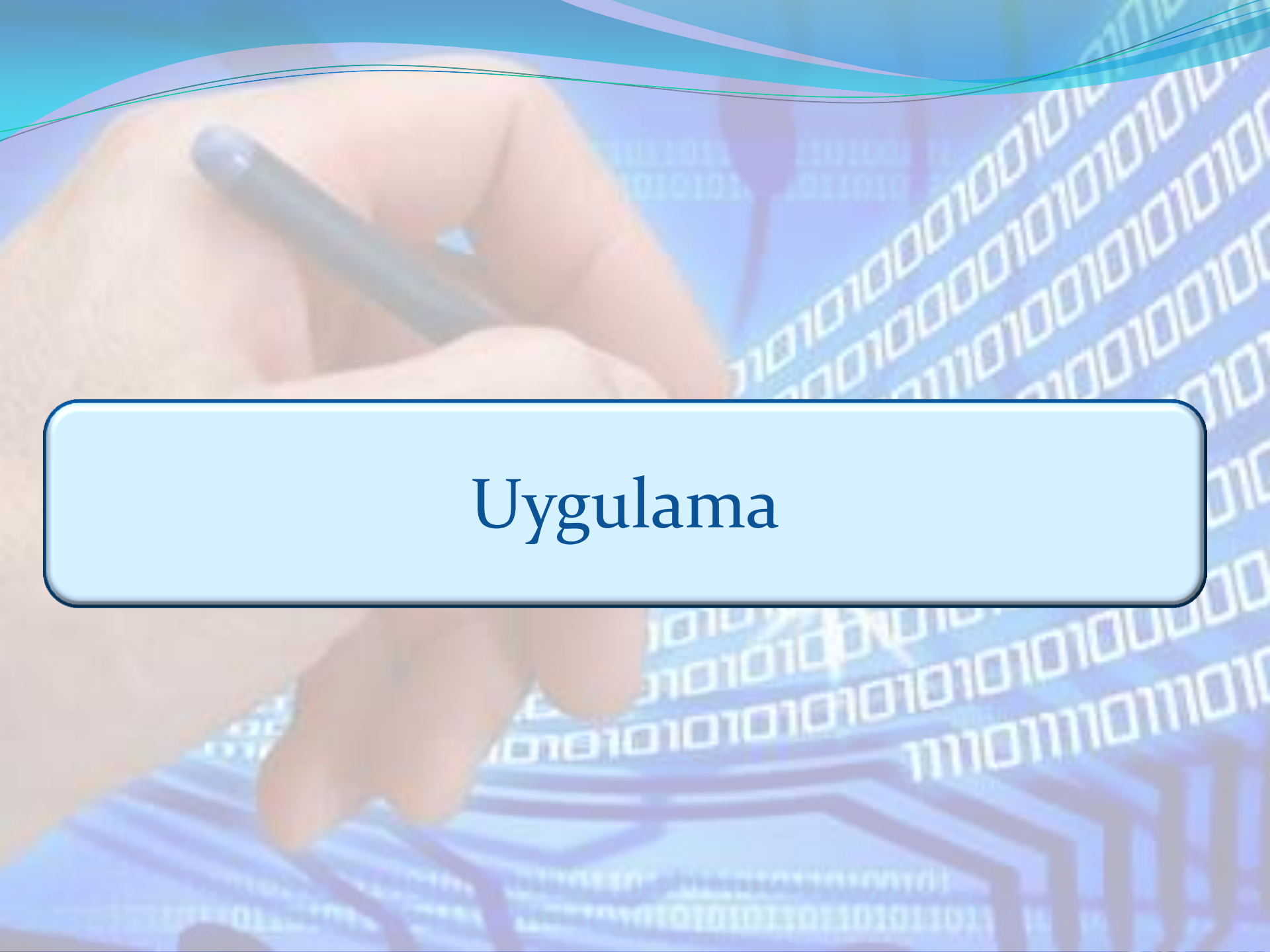
$$x_N = \frac{b_N}{a_{NN}}$$



Denklem sisteminde köşegen elemanları pivot elemanlar olarak adlandırılır ve katsayılar matrisi $[A]$ nın determinanı:

$$\text{Det}[A] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)}$$

şeklinde bu pivot elemanların çarpımıyla hesaplanır.

The background of the slide features a close-up of a hand holding a dark pen, poised over a computer keyboard. Overlaid on this image is a pattern of white binary code (0s and 1s) on a blue background, with some lines of code appearing to flow or curve across the frame. A light blue rounded rectangle with a dark blue border is centered in the middle of the image, containing the word 'Uygulama' in a dark blue serif font.

Uygulama

Uygulama-1

Aşağıda verilen denklem takımını Gauss-Eliminasyon yöntemi ile çözünüz ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 22$$

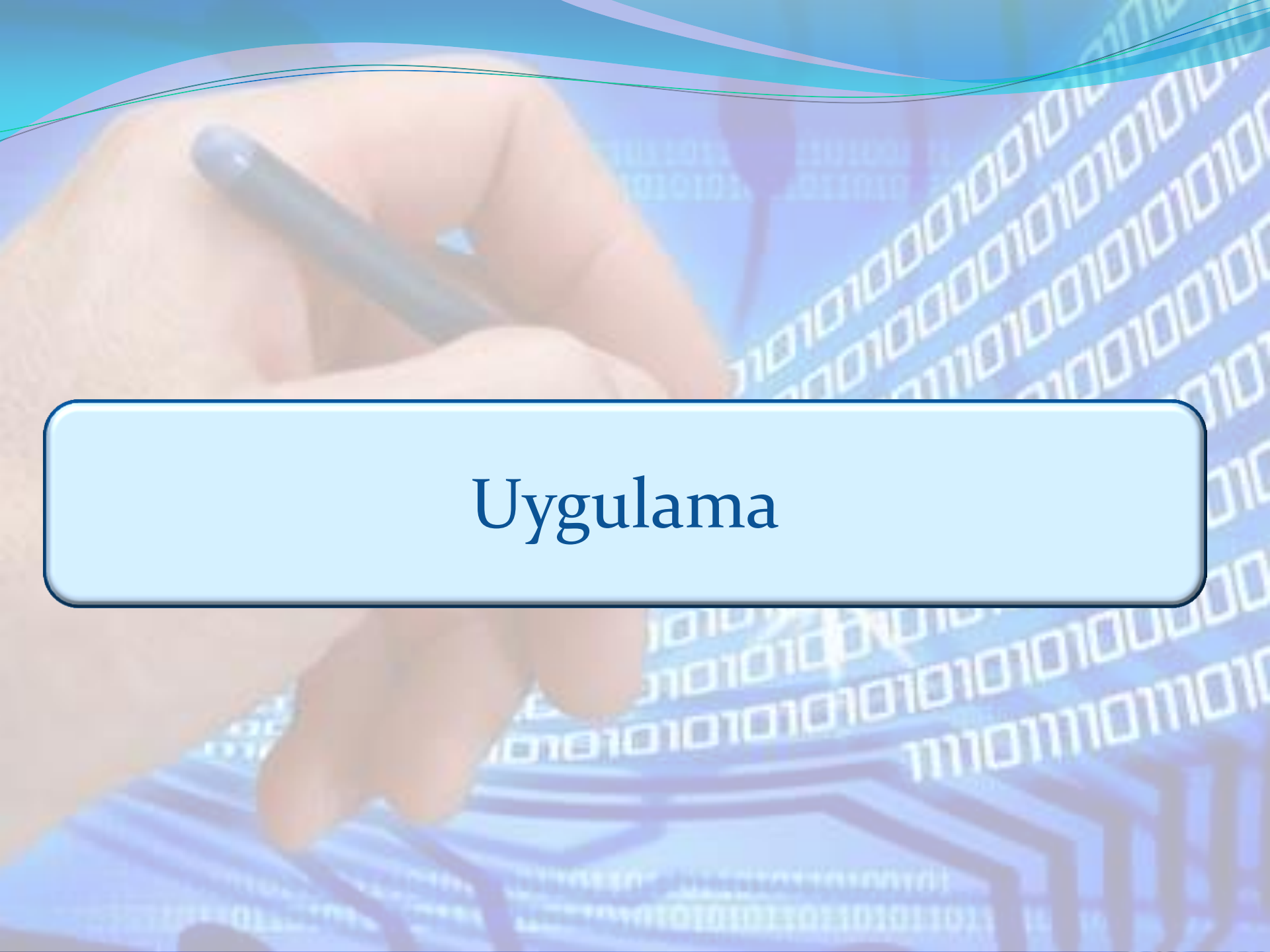
$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 84$$

$$x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = 322$$

Bazı matrislerde üst-üçgenselleştirme aşamasının herhangi bir adımında, daha önce yapılmış olan işlemlerin sonucunda a_{kk} *diyagonal elemanı* nın değeri *sıfır* olabilir. Bu gibi durumlarda sıfırla bölme sorunu nedeniyle yukarıda izah edilen Gauss yok etme yöntemi devam ettirilemez. Bu sorunu gidermenin bir yolu *kısmi pivot uygulaması*dır.

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1N} & a_{1N+1} \\
 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2N} & a_{2N+1} \\
 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} & a_{k-1k+1} & \dots & a_{k-1N} & a_{k-1N+1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{kk+1} & \dots & a_{kN} & a_{kN+1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1N} & a_{k+1N+1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{k+2k} & a_{k+2k+1} & \dots & a_{k+2N} & a_{k+2N+1} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{Nk} & a_{Nk+1} & \dots & a_{NN} & a_{NN+1}
 \end{bmatrix}$$

Lineer bir denklem takımındaki iki denklemin sırasının değiştirilmesi çözümü hiçbir şekilde değiştirmez. Buna göre Gauss yönteminin üst-üçgenselleştirme aşamasında herhangi bir k ıncı adımda a_{kk} diyagonal elemanı sıfır olmuşsa, bundan sonraki denklemlerden, bu diyagonal elemanın altındaki elemanı sıfır olmayan herhangi birisinin yeri k 'ıncı denklemle değiştirilebilir. Bu uygulamaya "*kısmi pivot uygulaması*" denir.

The background of the slide features a close-up of a hand holding a dark pen, poised to write on a blue keyboard. Overlaid on this image is a pattern of white binary code (0s and 1s) that flows diagonally across the frame. A decorative wavy line in shades of blue and purple runs along the top edge of the slide.

Uygulama

Uygulama 2

Aşağıda verilen denklem takımını Gauss-Eliminasyon yöntemi ile çözünüz ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 9$$

$$-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$2x_1 + 4x_3 - 7x_4 = -14$$

3.1.2. MAKSİMUM PİVOT STRATEJİSİ (Tam Pivotlama)

Katsayılar matrisinde başlangıçtan itibaren veya Gauss eliminasyon yönteminin üst-üçgenselleştirme aşamasının herhangi bir adımında diyagonal elemanlarından birinin veya bir çoğunun sıfır olması ya da diğerlerinden küçük olması halinde maksimum pivot stratejisi uygulanması yararlı olur. Maksimum pivot stratejisi genel olarak katsayılar matrisinin, en büyük elemanları diyagonal üzerine gelecek şekilde satırlarının ve sütunlarının yerlerinin değiştirilmesi şeklindedir. Katsayılar matrisinin iki satırının (sağ taraf elemanı da dahil olmak üzere) yer değiştirmesinin çözümü değiştirmeyeceği daha önce de belirtilmişti. Katsayılar matrisinde *iki sütunun yer değiştirmesi* ise *bilinmeyenlerin sırasının değiştirilmesi anlamına gelir* ki bilinmeyenlerin sırasının bu işlemler boyunca nasıl değiştiğinin tespit edilmesi ve çözüm elde edildikten sonra bilinmeyenlerin sırasının eski haline getirilebilmesi için bir sıralama işlemi yapılması gerekir.

Örnek

Yandaki 4 bilinmeyenli denklem sisteminde katsayılar matrisinin en büyük elemanı (maksimum pivot) 6 değerine sahip olup dördüncü satırın üçüncü sütununda yer almaktadır.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 11 \\ 5 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Bu maksimum pivotun ilk diyagonal elemanı olması için:

- önce birinci satırla dördüncü satırın yerlerinin değişmesi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 11 \\ 5 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

- sonra da birinci sütunla üçüncü sütunun yerlerinin değişmesi gerekmektedir. Ancak bu sütun değişikliği durumunda bilinmeyenler vektöründe birinci bilinmeyen ile üçüncü bilinmeyeni yerinin de değiştirilmesi gerekir.

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 11 \\ 5 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

İkinci aşamada katsayılar matrisinin birinci satır ve sütunu dışında kalan diğer elemanları arasından yeni bir pivot seçilecektir. En büyük iki elemanın da değeri 5 olup bunlardan birisi ikinci köşegen üzerinde yer almaktadır. Buna göre zaten pivot köşegen üzerinde olduğundan bir değişikliğe gerek olmayacaktır.

Üçüncü aşamada katsayılar matrisinin birinci ve ikinci satırları ve sütunları dışında kalan diğer elemanları arasından yeni bir pivot aranacaktır. Bu pivot dördüncü satır ve dördüncü

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 11 \\ 9 \\ 5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 11 \\ 9 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

sütunda yer alan 5 değeri olup, buna göre önce dördüncü satırla üçüncü satırın, ardından da dördüncü sütunla üçüncü sütunun yerlerinin değişmesi gerekmektedir. Ayrıca bilinmeyenler vektöründe üçüncü ve dördüncü sırada yer alan bilinmeyenlerin yerleri de değişecektir.

Görüldüğü gibi satırların yerleri değişmekle birlikte bilinmeyenlerin sırası değişmemiştir. Ancak sütunların yeri değişirken bilinmeyenlerin de yerleri değişmiştir.

Uygulama 3

Aşağıda verilen denklem takımını Gauss-Eliminasyon yöntemi ile tam pivotlama yaparak çözünüz.

$$7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -32$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -31$$

$$x_1 - x_2 - 6x_3 = -23$$

Ödev 5

Aşağıda verilen denklem takımını Gauss-Eliminasyon yöntemi ile çözünüz ve katsayılar matrisinin determinantını hesaplayınız.

$$3.6 X_1 + 2.4 X_2 - 1.8 X_3 = 6.3$$

$$4.2 X_1 - 5.8 X_2 + 2.1 X_3 = 7.3$$

$$0.8 X_1 + 3.5 X_2 + 6.5 X_3 = 3.7$$