

İÇİNDEKİLER

1. Giriş, Hata Analizi
2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma
 - 2.1. Kapalı Yöntemler
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi
 - 2.2. Açık Yöntemler
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi
3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 3.1. Direkt Yöntemler
 - 3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi
 - 3.1.2. Pivottlama
 - 3.1.3. Gauss-Jordan Yöntemi
 - 3.1.4. LU / LDU Yöntemleri
 - 3.1.5. Cholesky Yöntemi

- 3.2. Bir Matrisin Tersisi
 - 3.3. Ardışık Yaklaşım Yöntemleri
 - 3.3.1. Jacobi Yöntemi
 - 3.3.2. Gauss-Seidel Yöntemi
4. Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 4.1. Ardışık Yaklaşım Yöntemi
 - 4.2. Newton-Raphson Yöntemi
5. Sayısal Türev
6. Sayısal İntegral
 - 6.1. Trapez Kuralı
 - 6.2. Simpson Kuralı

3.1.1. Gauss Eliminasyon

- *Üst-üçgenselleştirme aşaması*

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

3.1.3 Gauss-Jordan Yöntemi

Bu yöntemde katsayılar matrisi

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{array}$$

şeklinde köşegen matris haline getirilir.

Böylece bilinmeyenler tek denklemden elde edilir. Köşegen matrisin elde edilmesi Gauss-Eliminasyon yöntemiyle aynı şekildedir. Yalnız burada köşegenin hem altı hem de üstü sıfırlanmaktadır.

Uygulama-1

Aşağıda verilen denklem takımını Gauss-Jordan yöntemi ile çözünüz.

$$7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -32$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -31$$

$$x_1 - x_2 - 6x_3 = -23$$

The background of the slide features a close-up of a hand holding a pen, poised to write on a surface. Below the hand, a computer keyboard is visible. Overlaid on the entire background is a pattern of binary code (0s and 1s) in a light blue color, creating a digital or technological theme.

3.1.4. LU ve LDU Yöntemi

Bir $[A]$ matrisi $\longrightarrow [A] = [L][D][U]$ veya $[A] = [L][U]$

şeklinde yazılabilir. Burada $[L]$ alt üçgen matris, $[U]$ üst üçgen matris ve $[D]$ diyagonal matristir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Bu eşitlik yardımıyla l , d ve u terimleri belirlenir. LDU veya LU yöntemiyle lineer denklem takımı çözülürken;

- 1) $[A] = [L][D][U]$ veya $[A] = [L][U]$ şekline getirilir.
- 2) $[A]\{x\} = [L]\underbrace{[U]\{x\}}_{\{y\}} = \{b\} \rightarrow [L]\{y\} = \{b\}$ elde edilir.
- 3) $[L]\{y\} = \{b\}$ çözülerek $\{y\}$ elde edilir.
- 4) $[U]\{x\} = \{y\}$ ifadesinden $\{x\}$ bilinmeyenleri elde edilir.

LU Yöntemi İşlem Adımları

$[A]=[L] \times [U]$ şeklinde yazıldığında $[L]$ ve $[U]$ matrislerinin çarpımında elde edilen yeni matrisin katsayıları $[A]$ matrisinin katsayılarına eşitlenerek $[L]$ ve $[U]$ matrislerinin katsayıları elde edilir.

$$\begin{array}{c} [A] \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} [L] \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{array} \right] \end{array} \times \begin{array}{c} [U] \\ \left[\begin{array}{ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} [A] \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \end{array} = \left[\begin{array}{ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{11} \times \ell_{21} & u_{12} \times \ell_{21} + u_{22} & u_{13} \times \ell_{21} + u_{23} \\ u_{11} \times \ell_{31} & u_{12} \times \ell_{31} + u_{22} \times \ell_{32} & u_{13} \times \ell_{31} + u_{23} \times \ell_{32} + u_{33} \end{array} \right]$$

Uygulama-1

Uygulama-1

Aşağıda verilen denklem takımının köklerini LU yöntemiyle çarpanlarına ayırarak belirleyiniz.

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -8$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16$$

Uygulama-2

Aşağıda verilen denklem takımının köklerini LDU yöntemiyle çarpanlarına ayırarak belirleyiniz.

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -8$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16$$

İÇİNDEKİLER

1. Giriş, Hata Analizi
2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma
 - 2.1. Kapalı Yöntemler
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi
 - 2.2. Açık Yöntemler
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi
3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 3.1. Direkt Yöntemler
 - 3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi
 - 3.1.2. Pivottlama
 - 3.1.3. Gauss-Jordan Yöntemi
 - 3.1.4. LU / LDU Yöntemleri
 - 3.1.5. Cholesky Yöntemi

- 3.2. Bir Matrisin Tersisi
 - 3.3. Ardışık Yaklaşım Yöntemleri
 - 3.3.1. Jacobi Yöntemi
 - 3.3.2. Gauss-Seidel Yöntemi
4. Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 4.1. Ardışık Yaklaşım Yöntemi
 - 4.2. Newton-Raphson Yöntemi
5. Sayısal Türev
6. Sayısal İntegral
 - 6.1. Trapez Kuralı
 - 6.2. Simpson Kuralı



3.1.5 Cholesky Yöntemi (Karekök Metodu)

Bu yöntem simetrik ve pozitif tanımlı katsayılar matrisi için uygulanır. $[A]=[L][U]$ şeklinde yazılan matris sistemi simetriden dolayı $[L]=[U]^T$ olduğundan aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$[A] = [L][U] = [U]^T [U]$$

$$\begin{array}{c} [A] \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} [U]^T \\ \left[\begin{array}{ccc} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array} \right] \end{array} \times \begin{array}{c} [U] \\ \left[\begin{array}{ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} [A] \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \end{array} = \left[\begin{array}{ccc} u_{11} \times u_{11} & u_{11} \times u_{12} & u_{11} \times u_{13} \\ u_{21} \times u_{11} & u_{21} \times u_{12} + u_{22} \times u_{22} & u_{21} \times u_{13} + u_{22} \times u_{23} \\ u_{31} \times u_{11} & u_{31} \times u_{12} + u_{32} \times u_{22} & u_{31} \times u_{13} + u_{32} \times u_{23} + u_{33} \times u_{33} \end{array} \right]$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{[A]} = \begin{bmatrix} u_{11} \times u_{11} & u_{11} \times u_{12} & u_{11} \times u_{13} \\ u_{21} \times u_{11} & u_{21} \times u_{12} + u_{22} \times u_{22} & u_{21} \times u_{13} + u_{22} \times u_{23} \\ u_{31} \times u_{11} & u_{31} \times u_{12} + u_{32} \times u_{22} & u_{31} \times u_{13} + u_{32} \times u_{23} + u_{33} \times u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} \times u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$u_{21} \times u_{11} = a_{21} \rightarrow u_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$u_{21} \times u_{12} + u_{22} \times u_{22} = a_{22} \rightarrow u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{21}^2}$$

$$u_{31} \times u_{11} = a_{31} \rightarrow u_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$u_{31} \times u_{12} + u_{32} \times u_{22} = a_{32} \rightarrow u_{32} = \frac{a_{32} - u_{31} \times u_{12}}{u_{22}}$$

$$u_{31} \times u_{13} + u_{32} \times u_{23} + u_{33} \times u_{33} = a_{33} \rightarrow u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{31}^2 - u_{32}^2}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}}^{[U]^T} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{u_{11}} & \sqrt{a_{22} - u_{21}^2} & 0 \\ \frac{a_{31}}{u_{11}} & \frac{a_{32} - u_{31} \times u_{12}}{u_{22}} & \sqrt{a_{33} - u_{31}^2 - u_{32}^2} \end{bmatrix}$$

Cholesky yöntemiyle lineer denklem takımı çözülürken;

- 1) $[A] = [U]^T [U]$ şekline getirilir.
- 2) $[A]\{x\} = [U]^T \underbrace{[U]\{x\}}_{\{y\}} = \{b\} \rightarrow [U]^T \{y\} = \{b\}$ elde edilir.
- 3) $[U]^T \{y\} = \{b\}$ çözülerek $\{y\}$ elde edilir.
- 4) $[U]\{x\} = \{y\}$ ifadesinden $\{x\}$ bilinmeyenleri elde edilir.

Uygulama-1

Uygulama-1

Aşağıda verilen denklem sistemini Cholesky (Karekök) yöntemiyle çözünüz.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

Uygulama-2

Uygulama-2

Aşağıda verilen denklem sistemini Cholesky (Karekök) yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 13 \\ 21 \\ 21 \end{Bmatrix}$$

Ödev-6

Aşağıda verilen denklem sistemini Cholesky (Karekök) yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 12 \\ 3 & 26 & -7 & -11 \\ -6 & -7 & 9 & 7 \\ 12 & -11 & 7 & 65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 34 \\ 22 \\ 326 \end{Bmatrix}$$