

İÇİNDEKİLER

- 1. Giriş, Hata Analizi ✓
- 2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma ✓
 - 2.1. Kapalı Yöntemler ✓
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi ✓
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi ✓
 - 2.2. Açık Yöntemler
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi

2.3 Açık Yöntemler

Kapalı yöntemlerde köke, alt ve üstten kısıpaca alınarak yaklaşıldığından bu yöntemler yakınsak yöntemlerdir ve mutlaka kök elde edilir. Ancak burada kökün bulunduğı aralığı tahmin etme zorluğu söz konusudur. Açık yöntemlerde buna gerek olmayıp iterasyona tahmini bir kök değeriinden başlanır. Fonksiyonun tipine ve başlangıç değeriine bağılı olarak ıraksayabilmeleri açık yöntemlerin en büyük dezavantajıdır.

2.3.1 Basit İterasyon Yöntemi

Bu yöntemde kökün bulunabilmesi için bir bağıntı kullanılır. $f(x)=0$ şeklinde verilen denklem, $x = g(x)$ şekline getirilerek ardışık tekrarlar sonunda köke ulaşılmaya çalışılır. Eğer $|g'(x_0)| < 1$ ise yöntem mutlaka köke yaklaşır. Yöntemin algoritması şu şekildedir:

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $f(x)=0$ ifadesinden $|g'(x_0)| < 1$ şartını sağlayan $x = g(x)$ eşitliği oluştur.

Adım 3: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ yeni kök değeri hesapla.

Adım 4: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon$ sağlanıncaya kadar 3. adımı tekrarla.

Uygulama-1

$f(x) = 2x - \cos x - 1$ denkleminin kökünü **basit iterasyon** yöntemiyle bulunuz. $x_0=1$, $\varepsilon_b=0.001$

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $f(x) = 0$ ifadesinden $|g'(x_0)| < 1$ şartını sağlayan $x = g(x)$ eşitliği oluştur.

Adım 3: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ yeni kök değeri hesapla.

Adım 4: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon$ sağlanıncaya kadar 3. adımı tekrarla.

ite	x_i	$x_{i+1}=g(x_i)$	ε_b
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Uygulama-2

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ denkleminin kökünü **basit iterasyon** yöntemiyle bulunuz. $x_0=4$, $\varepsilon_b=0.005$

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $f(x) = 0$ ifadesinden $|g'(x_0)| < 1$ şartını sağlayan $x = g(x)$ eşitliği oluştur.

Adım 3: $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ yeni kök değeri hesapla.

Adım 4: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon$ sağlanıncaya kadar 3. adımı tekrarla.

ite	x_i	$x_{i+1}=g(x_i)$	ε_b
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

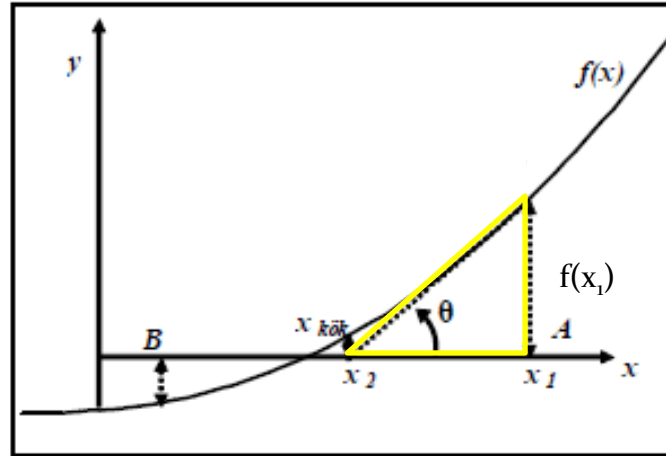
Ödev-3

$f(x)=0.1x^2 - x \log_{10}x$ denkleminin kökünü **basit iterasyon** yöntemi ile bulunuz. $x_0=0$,
 $\varepsilon_b=0.001$

ite	x_i	$x_{i+1}=g(x_i)$	ε_b
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

2.3.2 Newton-Raphson Yöntemi

Bu yöntemde x_i de fonksiyonun teğeti x eksenini kesecek şekilde uzatılır. Teğetin eksenini kestiği nokta x_{i+1} , kök için yeni değerdir.



şekilden
$$f'(x_1) = \tan \theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad (2.1)$$

elde edilir. Bu ifadeden yaklaşık kök değeri x_2
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.2)$$

veya
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir. Tekrarlama işlemine istenilen yaklaşıklık sağlanıncaya kadar devam edilir.

2.3.2 Newton-Raphson Yöntemi

Yöntemin algoritması:

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ifadesinden kök için yeni değer hesapla.

Adım 3: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon_b$ sağlanıncaya kadar 2. adımı tekrarla.

Eğer fonksiyonun eğimi sıfır veya sıfıra yakınsa yöntem ıraksar. Bu sebeple, kök için ilk tahminin iyi yapılması önemlidir.

Uygulama-1

$f(x) = x^3 - 3,5x^2 + 2x - 10$ denkleminin kökünü **Newton-Raphson** yöntemiyle bulunuz.
 $x_0=3, \varepsilon_b=0.005$

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ifadesinden kök için yeni değer hesapla.

Adım 3: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon_b$ sağlanıncaya kadar 2. adımı tekrarla.

ite	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε_b
0					
1					
2					
3					
4					

Uygulama-2

Newton-Raphson yöntemiyle $7^{2/3}$ sayısını başlangıç değerini 3,5 ve hata oranını 0.001 olarak hesaplayınız.

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ifadesinden kök için yeni değer hesapla.

Adım 3: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon_b$ sağlanıncaya kadar 2. adımı tekrarla.

ite	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε_b
0					
1					
2					
3					
4					

Uygulama-3

27 sayısının küp kökünü **Newton-Raphson** yöntemiyle başlangıç değerini 4 ve hata oranını 0.001 olarak hesaplayınız.

Adım 1: x_0 başlangıç değeri seç.

Adım 2: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ ifadesinden kök için yeni değer hesapla.

Adım 3: $\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \leq \varepsilon_b$ sağlanıncaya kadar 2. adımı tekrarla.

ite	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε_b
0					
1					
2					
3					

Ödev 4:

$f(x)=x-e^{-x}$ denkleminin kökünü **Newton-Raphson** yöntemiyle bulunuz. $x_0=0$ ve $\varepsilon_b=0.01$

ite	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε_b
0					
1					
2					