İÇİNDEKİLER

Hata Analizi

Sayısal sonuçlar, çeşitli sebeplerden kaynaklanan hatalardan olumsuz yönde etkilenir. Problemde uygulanan sayısal yöntemi veya algoritmayı değiştirerek sonuçların hatalardan etkilenmesini azaltmak çoğu kez mümkündür.

1) *Problemin modellenmesinden kaynaklanan hatalar*
2) *Verilerdeki hatalar*

1*) **Problemin modellenmesinden kaynaklanan hatalar***: Problemin modellenmesi sırasında bazı ikincil etkiler ihmal edilir. Mesela, mekanikte bazı cisimlerin parçacık olarak dikkate alınması, hava sürtünmesinin ihmal edilmesi gibi. Modelleme yapılırken ortaya çıkacak hatanın kabul edilebilir mertebede olmasına dikkat edilmelidir. Sonucun kabul edilebilir olması deneyle sağlatılır.

2) ***Verilerdeki hatalar:*** Bir ölçüm sonucunda elde edilen verilerde, ölçüm araçlarına bağlı olarak sistematik veya geçici etkilerden dolayı sistematik olmayan belirli bir hata bulunur. Giriş verileri başka bir hesaplamanın sonuçları ise hesaplama hataları içerirler. Ayrıca bazı fiziksel sabitler, irrasyonel-rasyonel sayıların bazıları gibi sayılar belirli bir ondalığa kadar yuvarlatılarak işleme sokulurlar.

- ***Yuvarlatma ve atma hataları:*** İşlem sırasında ara sonuçlar bulunurken yuvarlatma veya atma işlemlerinden meydana gelen hatalardır.
- ***Matematiksel kabullerden gelen hatalar:*** Bunlar matematik işlemlerin yaklaşık değerlerinin alınmasından kaynaklanırlar. Mesela, sonsuz terimli bir serinin belli bir değerde kesilmesi, sayısal integralin sonlu sayıda toplamlar ile hesaplanması gibi.

1.4 Mutlak ve Bağıl Hata

Mutlak Hata (Absolute Error)

Mutlak hata (ε_a);

$$\varepsilon_a = |Gerçek\ değer - Hesaplanan\ değer|$$

Bu hata daima pozitif olup bize hatanın büyüklüğü yani derecesi hakkında kesin bir bilgi vermez. Örneğin; gerçek boyutları 10cm ve 100cm olan iki çubuk sırasıyla 9cm ve 99cm olarak ölçülmüşse:

1. Çubuk için mutlak hata ➔ $\varepsilon_{a1} = |10 - 9| = 1cm$
2. Çubuk için mutlak hata ➔ $\varepsilon_{a2} = |100 - 99| = 1cm$

Sonuçta her iki çubukta da mutlak hata 1cm olarak belirlenmiştir. Bu değer hatanın büyüklüğü hakkında herhangi bir fikir vermez. Yapılan hatayı % olarak belirlemek için rölatif hata kullanılmaktadır.

Rölatif (Bağıl) Hata (Relative Error)

Rölatif (bağıl) hata (ε_r);

$$\varepsilon_r = \frac{|Gerçek\ değer - Hesaplanan\ \ değer|}{|Gerçek\ değer|}$$

Aynı örnek için rölatif hata değerleri hesaplanırsa;

1. Çubuk için rölatif hata ➔ $\varepsilon_{r1} = \frac{|10-9|}{|10|} = 0{,}1 = \%10$
2. Çubuk için rölatif hata ➔ $\varepsilon_{r1} = \frac{|100-99|}{|100|} = 0{,}01 = \%1$

Görüldüğü gibi her iki çubukta da 1cm'lik hata yapılmasına rağmen. Birinci çubuktaki hata oranı (%10), ikinci çubuktaki hata oranından (%1) daha büyüktür.

Yaklaşık Rölatif (Bağıl) Hata

Yukardaki örnekte çubukların gerçek boyları bilinmektedir. Fakat pek çok mühendislik probleminin gerçek değerler bilinmemektedir. Bu nedenle hata hesaplamalarında aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\varepsilon_r \cong \frac{|son\ (mevcut)\ yaklaşık\ değer - önceki\ \ yaklaşık\ değer|}{|son\ (mevcut)\ yaklaşık\ değer|}$$

Problemlerin çözümünde bu hata değerinin, önceden belirlenen bir tolerans değerinden (ε) küçük olup olmadığına bakılır yani;

$$\varepsilon_r \leq \varepsilon$$

şartı sağlatılıncaya kadar işlemlere devam edilir. Bu şart sağlandığında sonucun kabul edilebilir hata sınırları içinde olduğu anlaşılır.

Örnek 1:

Euler sabit (e) sayısının yaklaşık hali

a) 2,7183
b) Bayağı kesir olarak (19/7) olarak verildiğinde bağıl hatayı belirleyin.

Örnek 2: Aşağıda Maclourin serisi açılımını kullanarak $e^{0,5}$'in değerini her seferinde 1 terim daha ekleyerek hesaplayınız. $e^{0,5}$'in gerçek değerinin 1,648721271 olduğuna dikkat ediniz. ε =%0,05 olarak dikkate alınacaktır.

Maclourin serisi $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

Gerçek rölatif hata (G.R.H) için: $\varepsilon_r = \frac{|Gerçek\ değer - Hesaplanan\ \ değer|}{|Gerçek\ değer|}$

Yaklaşık rölatif hata (Y.R.H) için: $\varepsilon_r = \frac{|son\ (mevcut\ )\ yaklaşık\ değer - önceki\ \ yaklaşık\ değer|}{|son\ (mevcut\ )\ yaklaşık\ değer|}$

İÇİNDEKİLER

Doğrusal Olmayan Denklemlerde Kök Bulma

2.1 Giriş

$f(x) = 0$ şartını sağlayan x değerlerine f fonksiyonunun kökleri denir. f fonksiyonunun kökleri analitik olarak elde edilemediğinde sayısal çözüm yöntemlerine başvurmak gerekir. Bir denklemin köklerini bulmakta kullanılan sayısal çözüm yöntemleri;

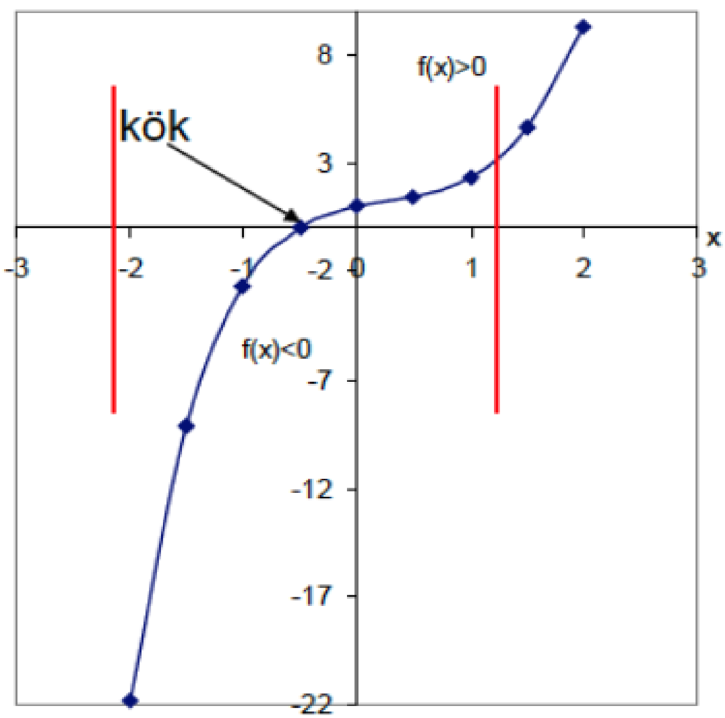
a) ***Kapalı Yöntemler***

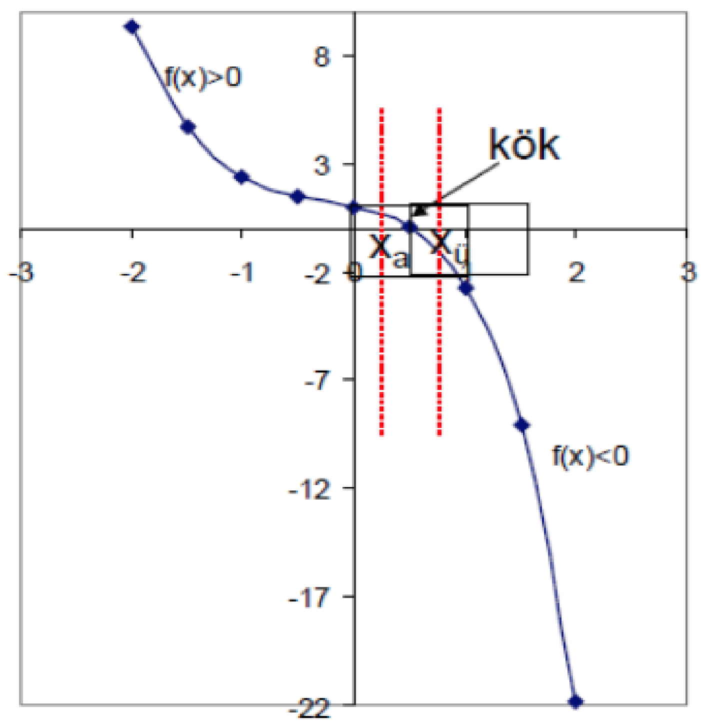
b) ***Açık Yöntemler***

olarak iki ana başlık altında toplanabilir.

2.2 Kapalı Yöntemler

Fonksiyonlar kök civarında işaret değiştirdiklerinden, kökü sağından ve solundan kıskaca alıp bu aralığı gittikçe daralttığımızda köke ulaşmak mümkündür. Bunun için iki tane başlangıç değerine ihtiyaç vardır. Kök, bu iki değerin arasındaki kapalı bölgede olduğundan bu yöntemlere kapalı yöntemler denir. Kapalı yöntemlerle kök bulunurken seçilecek aralık, arada başka bir kök olmaması için mümkün olduğunca dar seçilmelidir.





2.2.1 Aralığı İkiye Bölme Yöntemi (Bisection Method)

Bu yöntem, kökün bulunduğu aralığı yarılayarak (ikiye bölerek) daraltma prensibine dayanır. Yöntemin dezavantajı yavaş yakınsaması ve bazen doğru olarak çalışmamasıdır. Yöntemin algoritması şu şekildedir:

Adım 1: $f(x_a)f(x_ü) < 0$ şartını sağlayan $[x_a, x_ü]$ aralığı seç.

Adım 2: $x_r = \dfrac{x_a + x_ü}{2}$ şeklinde aralığın orta değerini bul. Bu kök için yaklaşık değerdir.

Adım 3: $f(x_a)f(x_r) < 0$ ise kök $[x_a, x_r]$ aralığında, $[x_a, x_ü] = [x_a, x_r]$ alarak Adım 2'ye dön.

$f(x_r)f(x_ü) < 0$ ise kök $[x_r, x_ü]$ aralığında, $[x_a, x_ü] = [x_r, x_ü]$ alarak Adım 2'ye dön.

Adım 4: $\left|\dfrac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}}\right| \leq \varepsilon$ şartı sağlanıncaya kadar 2. adımdan itibaren işlemleri tekrarla.

Uygulama-1

Aralığı ikiye bölme yöntemini kullanarak 3'ün karekökünü $\varepsilon=10^{-3}$ olacak şekilde hesaplayınız. $x_a=1$, $x_ü=2$

Çözüm

Çözülecek denklem $f(x) = x - \sqrt{3}$ olsun.

ite	x_a	$x_ü$	x_r	$f(x_a)$	$f(x_ü)$	$f(x_r)$	ε_r
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Uygulama-2

Aralığı ikiye bölme yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonun kökünü $\varepsilon=10^{-3}$ olacak şekilde hesaplayınız. $x_a=14$, $x_{ü}=15$

$$f(x) = \frac{667.38}{x}\left(1 - e^{-0.146843x}\right) - 40$$

Adım 1: $f(x_a)f(x_{ü})<0$ şartını sağlayan $[x_a, x_{ü}]$ aralığı seç.

Adım 2: $x_r = \dfrac{x_a + x_{ü}}{2}$ şeklinde aralığın orta değerini bul. Bu kök için yaklaşık değerdir.

Adım 3: $f(x_a)f(x_r)<0$ ise kök $[x_a, x_r]$ aralığında, $[x_a, x_{ü}]=[x_a, x_r]$ alarak Adım 2'ye dön.

$f(x_r)f(x_{ü})<0$ ise kök $[x_r, x_{ü}]$ aralığında, $[x_a, x_{ü}]=[x_r, x_{ü}]$ alarak Adım 2'ye dön.

Adım 4: $\left|\dfrac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}}\right| \le \varepsilon$ şartı sağlanıncaya kadar 2. adımdan itibaren işlemleri tekrarla.

Uygulama-2

ite	x_a	$x_ü$	x_r	$f(x_a)$	$f(x_ü)$	$f(x_r)$	ε_r
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Ödev 1:

Aralığı ikiye bölme yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonun 6 ile 8 arasındaki kökünü ε=0.005 için bulunuz.

$$f(x) = x^2 - 25ln(x-1)$$

Adım 1: $f(x_a)f(x_{ü}) < 0$ şartını sağlayan $[x_a, x_{ü}]$ aralığı seç.

Adım 2: $x_r = \dfrac{x_a + x_{ü}}{2}$ şeklinde aralığın orta değerini bul. Bu kök için yaklaşık değerdir.

Adım 3: $f(x_a)f(x_r) < 0$ ise kök $[x_a, x_r]$ aralığında, $[x_a, x_{ü}] = [x_a, x_r]$ alarak Adım 2'ye dön.

$f(x_r)f(x_{ü}) < 0$ ise kök $[x_r, x_{ü}]$ aralığında, $[x_a, x_{ü}] = [x_r, x_{ü}]$ alarak Adım 2'ye dön.

Adım 4: $\left|\dfrac{x_r^{yeni} - x_r^{eski}}{x_r^{yeni}}\right| \le \varepsilon$ şartı sağlanıncaya kadar 2. adımdan itibaren işlemleri tekrarla.