3.2. Matrisin Tersi

Matrisin Tersi

Bir matrisin tersinin bulunabilmesi için

- o matrisin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^{EK}$$

- Matrisin kare matris olması gereklidir. Doğrusal cebirde, **kare matris**, satır ve sütun sayıları eşit olan bir matristir.

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 12 \end{bmatrix}_{4x4}$$

Matrisin Tersi (Gauss-Jordan Yöntemi)

Tanım :

$$AB=I\ ,\ BA=I$$

şartlarını sağlayan B matrisine A matrisinin tersi denir. Burada I, nxn birim matrisi göstermektedir.

Bir matrisin tersinin hesaplanabilmesi için, determinant değeri, kesinlikle sıfırdan farklı olmalıdır. Matris tersi hesabı için, en kolay bir usül; (nxn) lik matrisin yanına yine (nxn) lik birim matris yazılır ve (nxn) lik matris birim matrise dönüştürüldüğünde, yanındaki birim matris de (nxn) lik ters matrise dönüşmüş olur.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = [A]^{-1} = [B]$$

Uygulama-1

Aşağıdaki matrisin tersini Gauss-Jordan yöntemi ile bulunuz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Uygulama-2

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım ve elemanter satır işlemleri ile genişletilmiş (birim) formda tersini bulalım :

Uygulama-3

Aşağıdaki matrisin tersini Gauss-Jordan yöntemi ile bulunuz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

İÇİNDEKİLER

1. Giriş, Hata Analizi
2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma
   - 2.1. Kapalı Yöntemler
     - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi
     - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi
   - 2.2. Açık Yöntemler
     - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
     - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
     - 2.2.3. Sekant Yöntemi
3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
   - 3.1. Direkt Yöntemler
     - 3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi
     - 3.1.2. Pivotlama
     - 3.1.3. Gauss-Jordan Yöntemi
     - 3.1.4. LU / LDU Yöntemleri
     - 3.1.5. Cholesky Yöntemi
   - 3.2. Bir Matrisin Tersi
   - 3.3. Ardışık Yaklaşım Yöntemleri
     - 3.3.1. Jacobi Yöntemi
     - 3.3.2. Gauss-Seidel Yöntemi
4. Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü
   - 4.1. Ardışık Yaklaşım Yöntemi
   - 4.2. Newton-Raphson Yöntemi
5. Sayısal Türev
6. Sayısal İntegral
   - 6.1. Trapez Kuralı
   - 6.2. Simpson Kuralı

3.3 Ardaşık Yaklaşım Yöntemleri

3.4 Ardışık Yaklaşım Yöntemleri

Bu yöntemler fazla bilinmeyenli veya katsayılar matrisi fazla sayıda sıfır içeren sistemler için uygundur. Fazla sıfırlı matrislerle uygulamada sıkça karşılaşılır. Ardışık yaklaşım yöntemlerinde, bilinmeyenler için önce yaklaşık başlangıç değerleri seçilir. Ardından bu değer, yeterli yakınsama sağlanıncaya kadar ardışık iterasyonlarla düzeltilir.

- ***Jacobi Yöntemi***
- ***Gauss-Seidel Yöntemi***

3.4.1. *Jacobi Yöntemi*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

denklem sistemini köşegen üzerindeki bilinmeyen sol tarafta, diğer bilinmeyenler sağ tarafta kalacak şekilde düzenleyelim:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n\right) \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

3.4.1. *Jacobi Yöntemi*

Bu ifade matris formda

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 / a_{11} \\ b_2 / a_{22} \\ \vdots \\ b_n / a_{nn} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} / a_{11} & \cdots & a_{1n} / a_{11} \\ a_{21} / a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} / a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} / a_{nn} & a_{n2} / a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

Verilen bu denklem sisteminde $a_{ii} \neq 0$ olmalıdır. Şayet köşegen üzerindeki herhangi bir terim sıfır ise denklemlerin yeri değiştirilerek köşegen üzerinde sıfır eleman olması önlenir. Ayrıca hızlı yakınsama için köşegen terimleri mümkün olduğunca büyük olmalıdır.

3.4.1. *Jacobi Yöntemi*

Yöntem şu şekilde uygulanır:

1. İlk yaklaşım değeri olarak bütün değişkenler sıfır seçilir.

   $x_i^{(0)} = 0$

2. Bir sonraki adım için yeni x_i değerleri

   $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

   ifadesinden elde edilir.

3. $\left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\| \leq \varepsilon$ sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir. N_{step} iterasyonu durdurmak istediğimiz adım sayısı olmak üzere $k > N_{step}$ olduğunda işlem durdurulur. Bu ikinci şart genelde yakınsama sağlanamadığında işlemi durdurmak için kullanılır.

   Not: $\left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2}$ olarak hesaplanır.

Uygulama-1

Aşağıdaki denklem takımını Jacobi yöntemi ile çözünüz. 5 ondalık hassasiyetle çalışınız ε=0.0001

$$14x_1 + 2x_2 + x_3 = 21$$

$$3x_1 + 20x_2 + 2x_3 = 49$$

$$x_1 + x_2 + 18x_3 = 57$$

Uygulama-2

Aşağıdaki denklem takımını Jacobi yöntemi ile çözünüz. 5 ondalık hassasiyetle çalışınız. ε=0.02

$$3.21x_1 + 1.53x_2 + 1.04x_3 = 5.23$$
$$0.64x_1 + 1.21x_2 + 2.05x_3 = 1.01$$
$$0.15x_1 + 2.11x_2 + 30.75x_3 = -26.36$$

3.4.2. Gauss-Seidel Yöntemi

Bu yöntemin Jacobi yönteminden farkı, düzeltilen değerlerin bir sonraki adımda grup halinde kullanılmayıp, aynı adımdaki takip eden işlemde hemen kullanılmasıdır. Mesela, *k*. adımda $x_1^{(k)}$ bulununca hemen ikinci denklemde $x_2^{(k)}$ nın, üçüncü denklemde $x_3^{(k)}$ nın bulunmasında kullanılır. Gauss-Seidel yönteminde yakınsama kriteri olarak

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

şartı en az bir eleman için sağlatılmalıdır.

Bu yöntemde işlem akışı şöyledir:

1. İlk yaklaşım değeri olarak bütün değişkenler sıfır seçilir.

   $$x_i^{(0)} = 0$$

2. Bir sonraki adım için yeni x_i değerleri

   $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

   ifadesinden elde edilir.

3. $\left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\| \leq \varepsilon$ sağlanıncaya kadar iterasyona devam edilir. N_{step} iterasyonu durdurmak istediğimiz adım sayısı olmak üzere $k > N_{step}$ olduğunda işlem durdurulur. Bu ikinci şart genelde yakınsama sağlanamadığında işlemi durdurmak için kullanılır.

Uygulama-1

Aşağıdaki denklem takımını Gauss-Seidel yöntemi ile çözünüz. 5 ondalık hassasiyetle çalışınız

ε=0.0001

$$14x_1 + 2x_2 + x_3 = 21$$

$$3x_1 + 20x_2 + 2x_3 = 49$$

$$x_1 + x_2 + 18x_3 = 57$$