

İÇİNDEKİLER

1. Giriş, Hata Analizi
2. Lineer Olmayan Denklemlerde Kök Bulma
 - 2.1. Kapalı Yöntemler
 - 2.1.1. Aralığı İkiye Bölme Yöntemi
 - 2.1.2. Regula-Falsi Yöntemi
 - 2.2. Açık Yöntemler
 - 2.2.1. Basit İterasyon Yöntemi
 - 2.2.2. Newton-Raphson Yöntemi
 - 2.2.3. Sekant Yöntemi
3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 3.1. Direkt Yöntemler
 - 3.1.1. Gauss-Eliminasyon Yöntemi
 - 3.1.2. Pivottlama
 - 3.1.3. Gauss-Jordan Yöntemi
 - 3.1.4. LU / LDU Yöntemleri
 - 3.1.5. Cholesky Yöntemi

- 3.2. Bir Matrisin Tersini
 - 3.3. Ardışık Yaklaşım Yöntemleri
 - 3.3.1. Jacobi Yöntemi
 - 3.3.2. Gauss-Seidel Yöntemi
4. Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü
 - 4.1. Ardışık Yaklaşım Yöntemi
 - 4.2. Newton-Raphson Yöntemi
5. Sayısal Türev
6. Sayısal İntegral
 - 6.1. Trapez Kuralı
 - 6.2. Simpson Kuralı

BÖLÜM-5-6

Sayısal İntegral ve Türev

5.1 Newton-Cotes İntegral Formülleri

Newton-Cotes integral formülleri en yaygın sayısal integral hesap yöntemleridir. Bu formüller, karmaşık bir fonksiyonu veya tablo şeklinde düzenlenmiş verileri, integrali kolay bir yaklaşım fonksiyonuyla ifade etme esasına dayanır.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \quad (5.1)$$

Burada

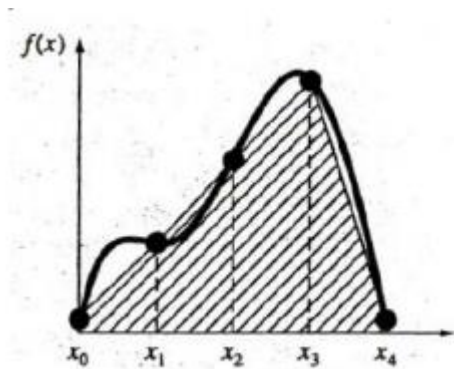
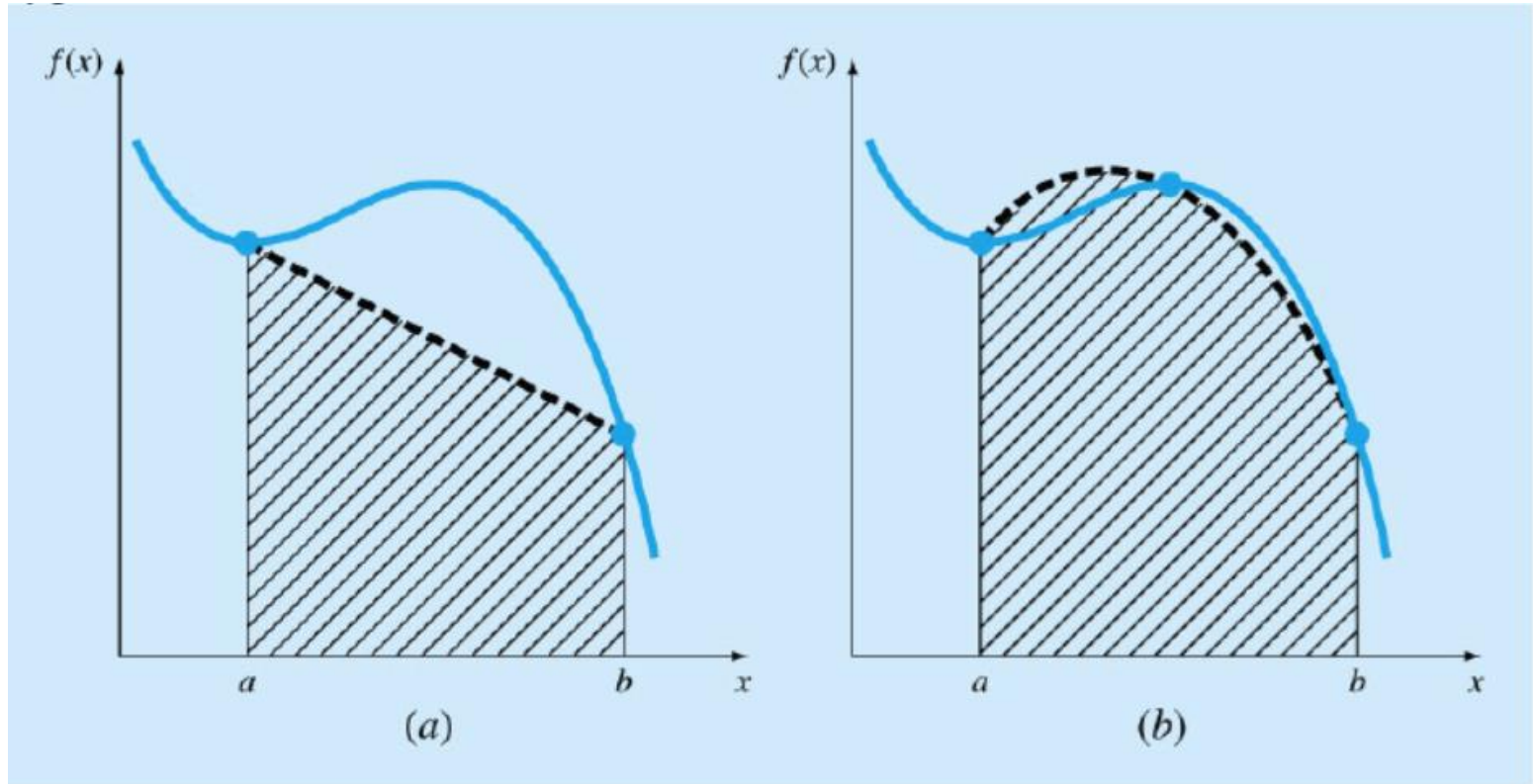
$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (5.2)$$

şeklinde bir polinomdur. $n = 1$ ve $n = 2$ için bu polinomlar

$$f_1(x) = \frac{1}{h}[(x - x_1)f_0 + (x - x_0)f_1]$$

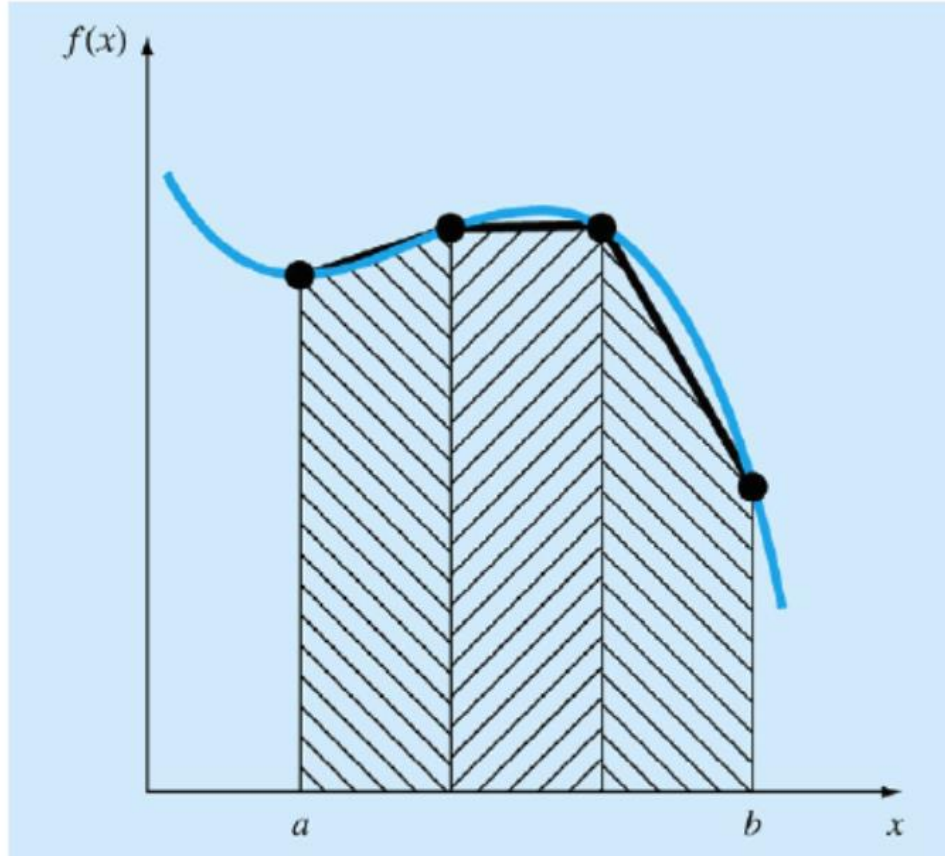
$$f_2(x) = \frac{1}{2h^2}[2(x - x_1)(x - x_2)f_0 + 2(x - x_0)(x - x_2)f_1 + (x - x_0)(x - x_1)f_2]$$

olarak alınabilir.



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

İntegral yaklaştırması, sabit uzunluktaki aralıklar boyunca uygulanan parçalı polinomlar dizisi kullanılarak da yapılabilir. Örneğın aşağıdaki şekilde, integrale yaklaştırma için üç tane düz doğru parçası kullanılmıştır.



5.1.1 Trapez (Yamuk) Kuralı

Trapez kuralı, Newton-Cotes integral formüllerinin ilki olup, (5.1) eşitliğindeki polinomun birinci derece olmasına karşı gelir. f_1 için yukarıda önerilen polinomda $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ yazılarak (5.1) de yerine koyulursa

$$I \cong \frac{1}{h} \int_a^b [(x-b)f(a) + (x-a)f(b)]dx = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{x^2}{2} - bx \right) f(a) + \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) f(b) \right]_{x=a}^{x=b}$$

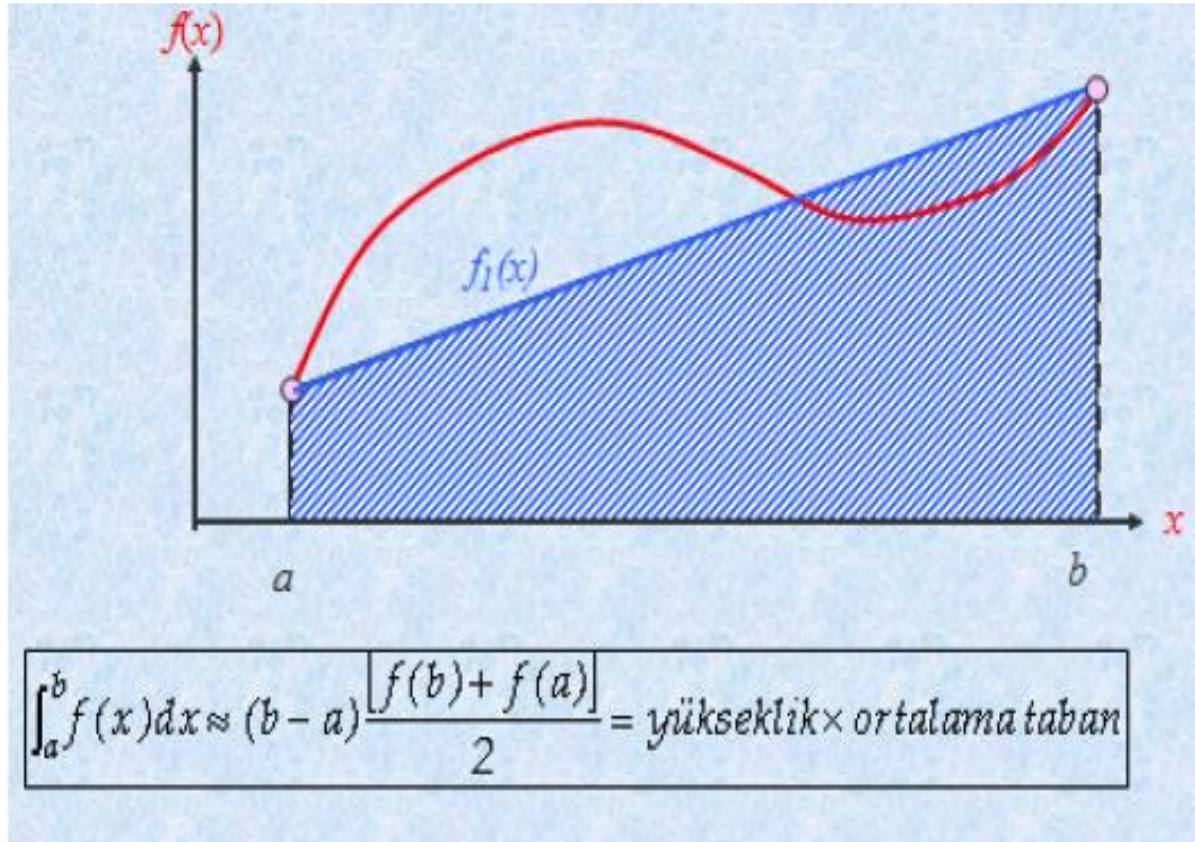
elde edilir. Buradan da gerekli kısaltmalar yapılarak

$$I = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (5.3)$$

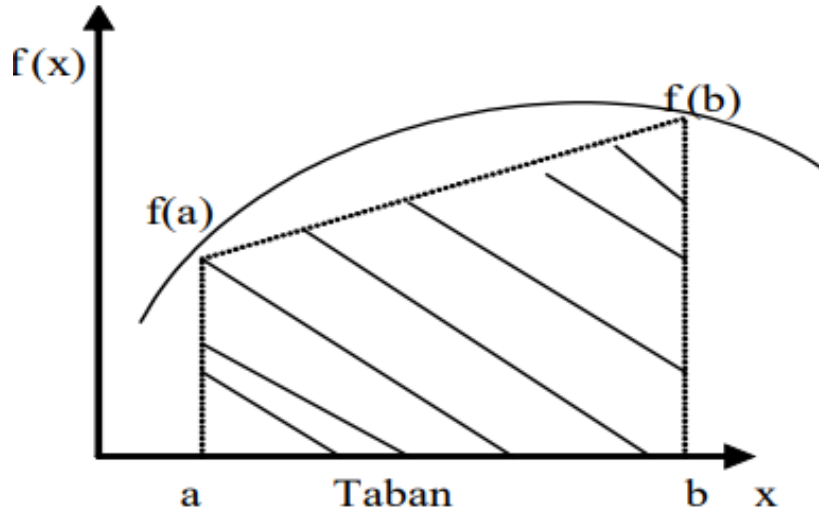
bulunur. Bu eşitliğe trapez kuralı denir. Geometrik olarak trapez kuralı Şekil 5.3'deki $f(a)$ ve $f(b)$ 'yi birleştiren doğrunun altındaki trapezin alanına yapılan yaklaştırmaya eşdeğerdir. Bu nedenle integral tahmini şu şekilde ifade edilebilir:

$$I \approx (b-a) \times \text{Orta taban} \quad (5.4)$$

Bütün Newton-Cotes formülleri (5.4)'ün genel formunda yazılabilir. Aslında bu formüller sadece ortalama tabanın formülasyonu bakımından birbirlerinden ayrılırlar.



❑ Fonksiyonun integrali, yamuğun alanına eşittir.

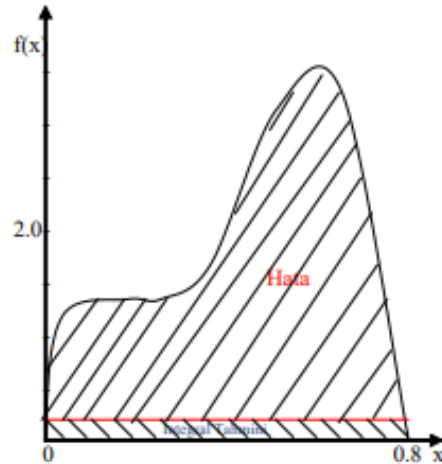


Bir yamuğun alanı,

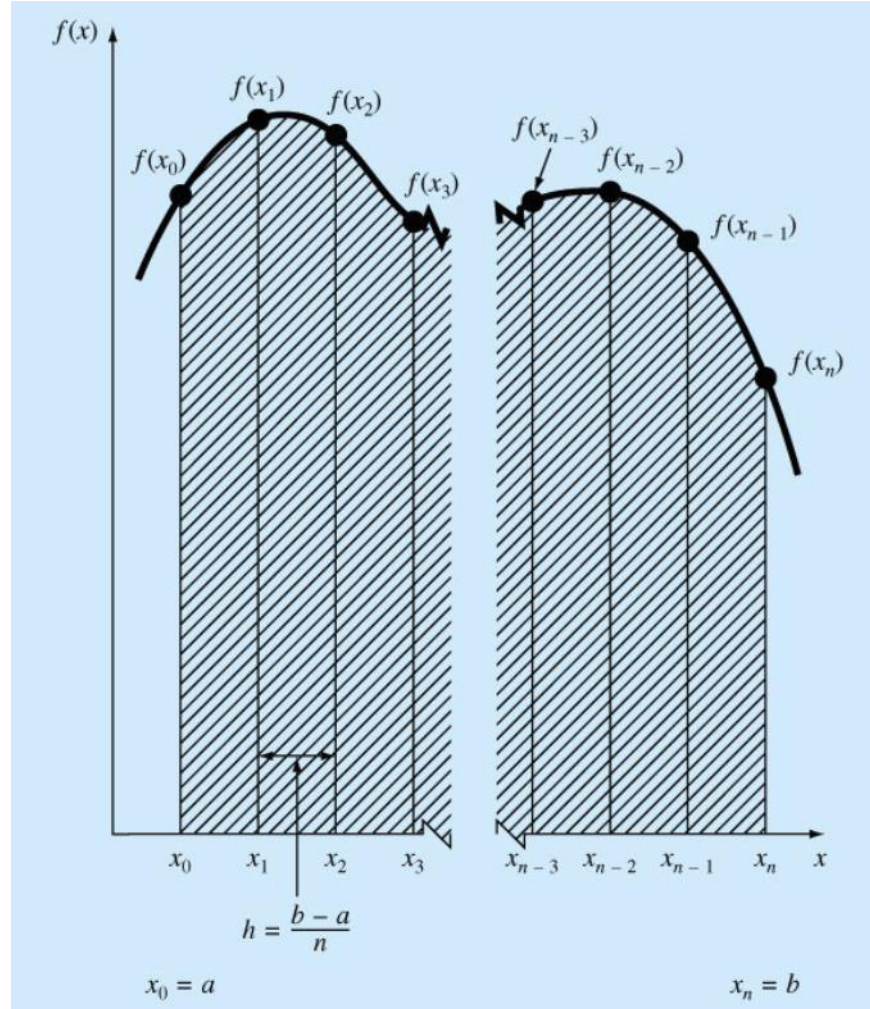
Alan = Yükseklik x Ortalama Genişlik

$$Integral = (b - a) * \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

❑ Başlangıç ve bitiş noktalarının seçimi, hata açısından oldukça önemlidir.



Trapez kuralının doğruluğunu iyileştirmenin bir yolu a'dan b'ye olan integral aralığını belli sayıda alt aralıklara bölmek ve her bir aralık için kuralı uygulamaktır. Daha sonra her bir aralığın alanı toplanarak tüm integral aralığının alanı elde edilir.



Şekilde integrali alınacak bölge için $(n+1)$ eşit aralıklı temel nokta vardır $(x_0, x_1, \dots, x_n)$.
Dolayısıyla,

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (5.5)$$

genişliğine sahip n tane aralık var demektir. Buna göre integral ifadesi

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade için trapez kuralı uygulanırsa yaklaşık integral değeri

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \quad (5.7)$$

olur. Buradan $f(x_0) = f_0$ ve $f(x_n) = f_n$ denilirse

$$I = \frac{h}{2} \left[f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right] \quad (5.8)$$

Uygulama-1

Uygulama-1

Aşağıda verilen integrali $n=4$ alarak Yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

$$I = \int_{-2}^2 e^{-x^2/2} dx$$

Uygulama-2

Uygulama-2

Aşağıda verilen integrali $n=6$ alarak Yamuk yöntemi ile hesaplayınız..

$$I = \int_1^4 \frac{13(x - x^2)}{\sqrt{e^{3x}}} dx$$

Uygulama-3

Uygulama-3

Aşağıda verilen integrali $n=4$ alarak Yamuk yöntemi ile hesaplayınız..

$$I = \int_0^4 x e^{2x} dx$$