

5.1 TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARI SIFIR YAPAN (KÖK) DEĞERLERİNİN HESABI

Eğer $y = f(x)$ gibi bir fonksiyon; x gibi bir bağımsız değişkenin farklı dereceden terim ve fonksiyonlarını birlikte içerecek şekilde bir yapıya sahip ise; böyle fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyonlar denmektedir. Tek değişkenli bir fonksiyonun bütün terimleri; sadece x bağımsız değişkenin farklı tam sayı dereceden kuvvetlerini içerecek özellikte bir yapıya sahip ise, böyle fonksiyonlara polinom denmektedir. Bu durumuyla polinomlar; tek bağımsız değişkenli fonksiyonların özel bir hali olmaktadır.

Bu yapıdaki fonksiyonlarda; $y = f(x)$ bağımlı değişkenin değerini sıfır yapan, “ $f(x) = 0$ bu şekline denklem denmektedir”, x bağımsız değişkenin x_i değerlerini hesaplamaya, tek değişkenli fonksiyonları sıfır yapan değerlerin hesabı veya kısaca; köklerinin hesaplanması denir. Tek değişkenli fonksiyonların köklerini hesaplamada birçok çözüm yöntemleri bulunmaktadır. Bu iteratif çözüm yöntemleri genel yapıdaki fonksiyonların köklerini hesaplamada kullanılabileceği gibi, aynı zamanda polinomların da köklerini hesaplamada kullanılabilen genel yöntemler olmaktadır. Polinomlar, özel yapıdaki fonksiyonlar olduklarından, sadece bunların köklerini hesaplama kullanılan çeşitli yöntemler mevcuttur. Buna göre; her iki durumla ilgili yöntemler özellikleri gereği iki ayrı başlık altında ele alınmışlardır.

Birinci grupta ele alınanlar; istenen sonuçlara iteratif çözüm yoluyla yaklaşan, “iteratif çözüm yöntemleri” yada diğer adıyla “*Doğrusal olmayan denklemlerin köklerinin hesaplanması*” yöntemleri, bir diğerlerinde ise; iteratif olmayan direkt çözüm veren yöntemler yada “*Polinomların köklerinin hesaplanması*” şeklindedir.

5.1.1 DOĞRUSAL OLMAYAN TEK DEĞİŞKENLİ(*NON-LİNEER*) FONKSİYONLARIN KÖKLERİNİN HESAPLANMASI

Matematikte bir değişkenin farklı derecen terimlerinden oluşan; birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden, polinomlarını sıfır yapan değerleri, yada diğer bir ifade ile *köklerini*, doğrudan özel hesaplama yöntemleri kullanılarak kolayca hesaplanabilmesine rağmen, her bir terimi bir değişken, üstel, logaritmik ya da trigonometrik fonksiyonlar gibi farklı ifadelerden oluşan genel yapıdaki fonksiyonların kökleri bu gibi yollarla hesaplamak olanaksızdır. Bu gibi fonksiyonlar için çoğu zaman özel çözüm yöntemleri kullanılarak aranan gerçek kök değerlerine iteratif bir şekilde kademeli olarak ulaşılır.

Fonksiyonları sıfır yapan, veya denklemlerin herhangi bir alanda köklerini hesaplamaya yarayan bu özel çözüm yöntemleri genel özellikleri itibariyle bazı farklılıklar gösterirler. Bu farklılıkların başında, aranan gerçek kök değerine yaklaşım yolları ve hızları gelmektedir. Bu amaçla kullanılan çözüm yöntemlerinden bir veya birkaçı; gerçek kök değerine, kökün tanımlı olduğu alanda, apsis ekseninde bulunduğu aralığın her seferinde ikiye bölünmesi şeklinde iteratif olarak yaklaşırken, bir çoğu bu alanda tanımlanan herhangi bir konumdaki yardımcı bir doğru yada ikinci derece gibi düşük dereceden bir polinomu kullanarak aranan kök değerine bunlar yardımıyla kademeli olarak yaklaşılmaması prensibine dayanmaktadır. Aralığı ikiye bölme yada yardımcı doğruları kullanarak yapılan çözümlerden bir

fonksiyonun daima reel kök değerleri hesaplanmasına karşılık, ikinci veya düşük dereceden polinomları kullanarak yapılacak çözümlerden; reel kök değerleri yanında, sanal kök değerleri de hesaplanabilmektedir.

Çözüm yöntemlerinin bu gibi farklı esaslara göre geliştirilmiş olması, aynı zamanda her birinin farklı özelliklere sahip olmasına neden olmaktadır. Bu durum, herhangi birini kullanarak bir fonksiyonu sıfır yapan gerçek kök değerlerini hesaplamadaki iterasyon sayısını da farklı şekillerde etkilemektedir.

Benzer şekilde; iterasyon sayısını etkileyen bir başka neden de fonksiyonun çözüm bölgesindeki eğriliği ve genel karakteri olmaktadır. Bu etkenlerin, denklemlerin gerçek kök değerlerini hesaplama işlemleri üzerindeki olumsuz yansımaları, iterasyon sayılarını artırdığı gibi bazı durumlarda yakınsamayıp, ıraksak olmalarına da neden olmaktadır. Bazı yöntemler için yakınsamanın daha hızlı olması, değişik ek önlemler alınarak sağlanabilmesine rağmen, bir yöntemin ıraksaklığı değişik seçenekler kullanılarak giderilebilir. ıraksaklık sorununun gidermedeki seçeneklerden biri; başlangıçta çözüm aralığını küçük seçmek olabileceği gibi, sorunun bu yolla ortadan kaldırılamaması halinde; bir başka çözüm yönteminin denenmesi yoluna gidilir.

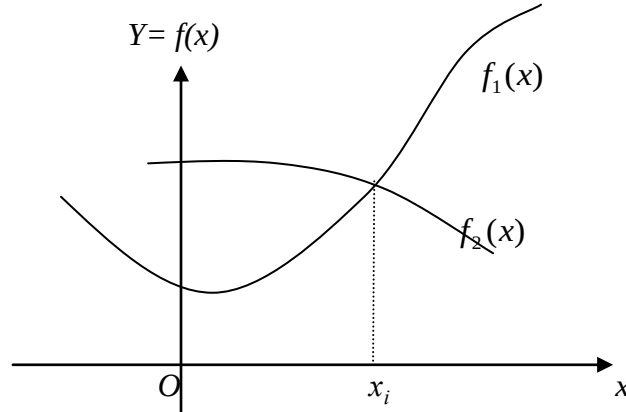
Bu şekilde; herhangi bir $f(x) = 0$ fonksiyonunu sıfır yapan x_i kök değerlerinin iteratif yolla çözümü için, her zaman aranan kök değerinin bulunduğu bölgede bir $[x_a, x_b]$ aralığına; yada $x_a \leq x_0 \leq x_b$ özelliğine sahip, x_0 gibi bir ilk yaklaşık kök veya başlangıç değerine ihtiyaç vardır. Bu değerler; çoğu zaman problemle birlikte verilmelerine rağmen, verilmemiş oldukları zaman; doğrudan fonksiyonların yada çözüm algoritmasında kullanılan iterasyon fonksiyonlarının grafik gösterimlerinden çizimsel olarak geometrik bir şekilde belirlenebilirler.

Kesin kök değerleri, ilk iterasyon adımında bu yaklaşık kök değerleri kullanılarak yapılan işlemlerden elde edilen yeni sonuçların, bir sonraki iterasyon adımında yaklaşık değerler kabul edilerek, yapılan ardı sıra çözüm işlemlerinden iteratif olarak hesaplanır. İterasyonun sonuçlarının yakınsadığı adımda *“bir önceki adım sonucunda elde edilen değerlerin bir sonraki adımdan elde edilen değerlerden farkı sıfır yada daha önceden belirlenmiş; kabul edilebilir bir sınır değerinden küçük olduğunda”* hesaplama işlemleri durdurularak en son adımdan elde edilen değer aranan kök değerleri olarak alınır.

5.1.1.1 Grafik Çözüm Yöntemi

Bu yöntemde; $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonun köklerini bulmak için, isminden de anlaşıldığı gibi grafik çözümden faydalanılmaktadır. Bu amaçla; akla ilk gelen çözüm yolu; fonksiyonun, x bağımsız değişkene belli değerler vererek, fonksiyonun alacağı değerleri hesapladıktan sonra, bu değerlere göre bir kartezyen sistemde grafiğini çizmektir. Sonra; $f(x)$ eğrisin, x -ekseninin kestiği noktanın apsis değerleri aranan çözüm olarak, bu grafikten elde edilmektedir. Bu çözümde, $f(x)$ eğrisinin apsis eksenini kestiği noktayı bulmak oldukça zor bir işlemdir. Bunun yerine bir diğer yol, $f(x)$ fonksiyonu $f_1(x) - f_2(x) = 0$ şeklinde $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ gibi iki bileşen fonksiyon şeklinde düşünülerek, alt bileşen fonksiyonlarına

ayrılır. Sonra, bunların her birinin seçilen bir kartezyen koordinat sisteminde grafikleri çizilir. Grafik 1.

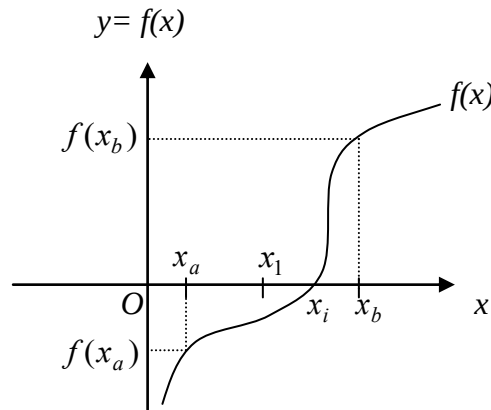


Grafik 1: Fonksiyonun Kök Değeri

Buradan, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ eğrilerinin kesişim noktasının x_i apsisi aranan çözüm olmaktadır. Yapılan işlemlerden de anlaşılacağı gibi, bu çözüm yolu grafik olduğundan, yaklaşık değer vermektedir. Bu haliyle, grafik yöntem ancak, daha çok diğer iteratif yöntemleri için gerekli olan başlangıç veya yaklaşık kök değerlerinin hesaplanmasında kullanılır bir yöntem olmaktadır.

5.1.1.2 Çözüm Aralığını İkiye Bölme Yöntemi

Çözüm aralığını ikiye bölme (*Bisection method*) yönteminde; $f(x)$ gibi bir fonksiyonu $[x_a, x_b]$ aralığında her zaman $f(x)=0$ yapan bir değer bulunabilmektedir. Bunu için gerekli koşul; $f(x_a)f(x_b) \leq 0$ ya da $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ değerlerinin zıt işaretli olma özelliğinin daima gerçekleşmesidir. Ancak, bu yöntemde ne var ki; her seferinde yaklaşık kök değerlerinin tanımlandığı aralığı ikiye bölmenin eşit aralıkta olması halinde yöntem fonksiyonun eğriliğine bağlı olarak yakınsamaktadır. Eğrinin eğriliği fazla ise geç, aksı halde erken yakınsamaktadır.



Grafik 2: Kök Değerine Yaklaşma

Burada görüldüğü gibi; çözüm aralığını ikiye bölme yöntemi doğrusal olmayan denklemlerin köklerini hesaplamada kullanılan diğer yöntemler gibi iteratif bir çözüm yöntemi olup adım, adım uygulanır. Bu amaçla, ilk işlem adımında; $x_a < x_i < x_b$ çözüm aralığının sınır değerleri için $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ fonksiyon değerleri hesaplanarak $f(x_a)f(x_b) \leq 0$ koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Eğer bu koşul sağlanmış ise, o zaman $x_a < x_i < x_b$ aralığında $f(x_i) = 0$ sıfır yapacak x_i gibi bir kök bulunacaktır. Birinci iterasyon adımında kök için yaklaşık bir değer; kökün bulunduğu aralığı ikiye bölmek suretiyle;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2}$$

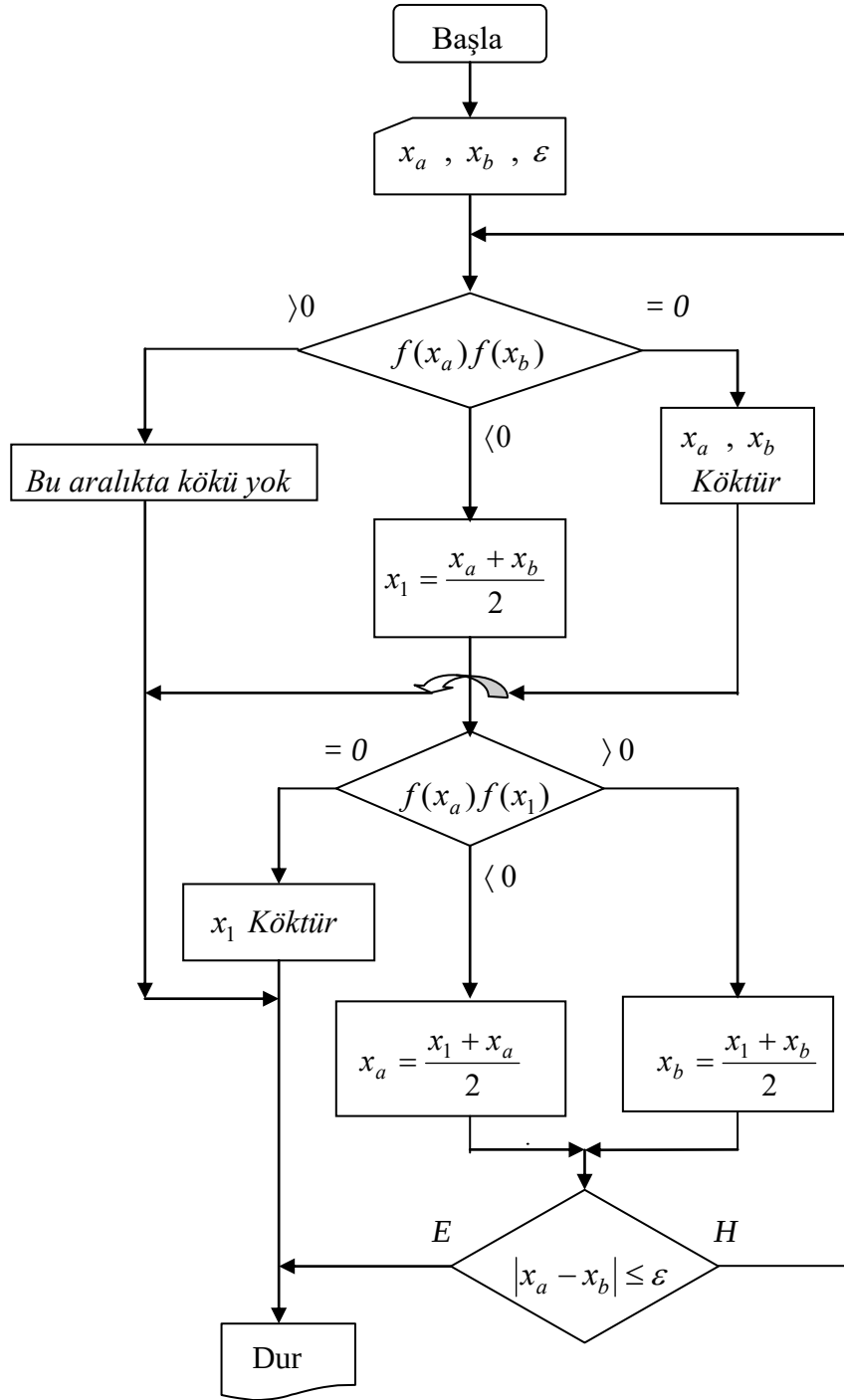
olarak hesaplanır.

Buradan hesaplanan x_1 değeri $f(x)$ fonksiyonunda x 'in yerine yazılarak $f(x_1)$ fonksiyon değeri hesaplanır. Daha sonra gerçek kökün hangi sınırlar arasında bulunduğunu belirlemek için, $f(x_1)$, $f(x_a)$ ve $f(x_b)$ değerlerinden işaretçe zıt olan birbirine yakın ikisi seçilir. Eğer; $f(x_a)f(x_1) \leq 0$ ise; gerçek kök $x_a < x_i < x_1$ sınırlarının belirlediği aralıkta, $f(x_1)f(x_b) \leq 0$ ise; gerçek kökün $x_1 < x_i < x_b$ sınırlarının belirlediği aralıkta olduğuna karar verilir. Yukarıdaki fonksiyon grafiğinin çiziminden de görüldüğü gibi; $f(x_1)f(x_b) \leq 0$ olduğundan, bundan sonraki iterasyon adımında gerçek kökün $x_1 < x_i < x_b$ aralığında aranması gerekmektedir. Birinci adımdaki işlemlere benzer şekilde; ikinci iterasyon adımında da $x_1 < x_i < x_b$ aralığı, önce

$$x_2 = \frac{x_1 + x_b}{2}$$

şeklinde ikiye bölünerek gerçek köke bir adım daha yaklaşılr. Yine, gerçek kökün hangi sınırların belirlediği aralıkta olduğuna karar verebilmek için, $f(x_2)$ fonksiyon değeri hesaplanarak, $f(x_2)$, $f(x_1)$ ve $f(x_b)$ zıt işaretli ve birbirine yakın değerlerde olan ikisi seçilerek, gerçek kök bu aralıkta aranır. Benzer şekilde eğer; $f(x_1)f(x_2) \leq 0$ ise; gerçek kök $x_1 < x_i < x_2$ sınırlarının belirlediği aralıkta, $f(x_2)f(x_b) \leq 0$ ise; gerçek kökün $x_2 < x_i < x_b$ sınırlarının belirlediği aralıkta olduğuna karar verilir. Bunlardan istenen koşulu sağlayanı seçilerek daha sonra amaçlanan sonuca ulaşınca kadar iterasyon işlemlerine benzer adımlarda devam edilir.

Bu yöntemle bir neticeye ulaşmada iteratif bir çözüm gerektiğinden, ilk adımdaki başlangıç değerlerinin seçimine ve eğrinin eğriliğinin durumuna bağlı olarak, ardı sıra yapılacak işlemler de fazla sayıda olacaktır. Bu gibi durumlarda uygun olanı, çözüm için bilgisayarları kullanmaktır. Bilgisayarların kullanılması ile istenen sonuca kısa zamanda ulaşılabilir. Böyle bir çözümdeki işlem algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.



Diyagram 1: Algoritma Çözümü

Örnek 1; $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunu $[1, 2]$ aralığında sıfır yapan köklerinden birini, çözüm aralığını ikiye bölme yöntemiyle, $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1: önce bu fonksiyonun $x_a = 1$ alt sınırı için değeri; $f(1) = -1$ ve $x_b = 2$ üst sınırı için değeri de; $f(2) = 5$ olarak hesaplanır. Birinci adım için ;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

ve fonksiyon değeri de,

$$f(1.5) = 1.5^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$

olarak hesaplanır.

Buradan; $f(x_a)(x_1) < 0$ olduğundan aranan gerçek kök $(1, 1.5)$ sınırları arasındadır denir. İkinci adım da gerçek kök, benzer şekilde işlemler yapılarak, bu aralıkta aranır. Bunu için;

$$x_2 = \frac{x_a + x_1}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

ve

$$f(1.25) = 1.25^3 - 1.25 - 1 = -0.297$$

$$f(x_2)(x_1) < 0$$

hesaplanır. Buna göre de; gerçek kökün $(1.25, 1.5)$ sınırlarının belirlediği aralıkta olur. Üçüncü adımda;

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1.5 + 1.25}{2} = 1.375$$

hesaplanarak; $x_{i+1} - x_i \leq 0.05$ oluncaya kadar iterasyon işlemlerine devam edilir.

Bu işlemler; sistematik olarak topluca bir arada gösterilmek istenirse; aşağıdaki tablo düzenlenebilir.

x_a	x_b	$x = \frac{x_a + x_b}{2}$	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x)$
1	2	1.5	-1	5	0.875
1	1.5	1.25	-1	0.875	-0.297
1.25	1.5	1.375	-0.297	0.875	0.225
1.25	1.375	1.3125	-0.297	0.225	-0.052
1.3125	1.375	1.34375	-0.052	0.225	0.083
1.3125	1.34375	1.328125	-0.052	0.083	0.015
1.3125	1.328125	1.3203	-0.052	0.015	-0.019

Tablo 1: İteratif Çözüm

Tablodan görüldüğü gibi; her iterasyon adımında çözüm aralığını ikiye bölerek elde edilen yaklaşık kök değerleri diğer kök değerleri ile birlikte verilen fonksiyonda yerine yazılarak her biriyle ilgili fonksiyon değerleri hesaplanır. Bu fonksiyon değerlerinden $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$ koşulunu sağlayan mutlak değerce en küçük olanlarına karşılık gelen x apsis değerleri seçilerek gerçek kök değerinin bu sınırlar arasında olduğu dikkate alınarak, bir sonraki adımda sınır değerleri olarak ele alınırlar. Bir sonraki iterasyon adımında bir önceki iterasyonda olduğu gibi aynı işlemler yapılır.

Sonuçta; verilen $x_{i+1} - x_i \leq 0.05$ hata sınırına uygun değer 5. iterasyon adımından $x=1.34375$ olarak elde edilir.

Örnek 2: $\sqrt{2} = ?$ kök değerini, çözüm aralığını ikiye bölme yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 2: Bu sayıyı $\sqrt{2} = x$ ise; her iki tarafın karesi alındığında, $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonu elde edilir. $\sqrt{2} = x$ yaklaşık kök değerleri olan (1,2) aralığının sınır değerleri için fonksiyonun değerleri; $f(1) = 1^2 - 2 = -1$ ve $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ olur.

Buna göre; ilk adımda;

$$x_1 = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \text{ve} \quad f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25$$

olarak hesaplanır ve $f(1)f(1.5) < 0$ olur. İkinci adımda; kök (1,1.5) sınır değerleri arasında aranır. Bu adımda

$$x_2 = \frac{x_a + x_1}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \quad \text{ve} \quad f(1.25) = 1.25^2 - 2 = -0.4375$$

$$f(1.25)f(1.50) < 0$$

hesaplamalarından, aranan kökün (1.25, 1.50) aralığında olduğu hesaplanır. İterasyon işlemlerine, benzer şekilde, aşağıdaki tablodaki gibi devam edilerek,

x_a	x_b	$x = \frac{x_a + x_b}{2}$	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f(x)$
1	2	1.5	-1	2	0.25
1	1.5	1.25	-1	0.25	-0.4375
1.25	1.5	1.375	-0.4375	0.25	-0.1094
1.375	1.5	1.4375	-0.1094	0.25	0.0664
1.375	1.4375	1.40625	-0.1094	0.0664	-0.0225
1.40625	1.4375	1.421875	-0.0225	0.0664	0.0217
1.40625	1.421875	1.41406	-0.0225	0.0217	-0.00043

Tablo 2: İteratif Çözüm

aranan kök değeri; $|x_{i+1} - x_i| < 0.007$ mutlak hata ile 7. iterasyon adımı sonucunda $\sqrt{2} = x = 1.41406$ olarak elde edilir.

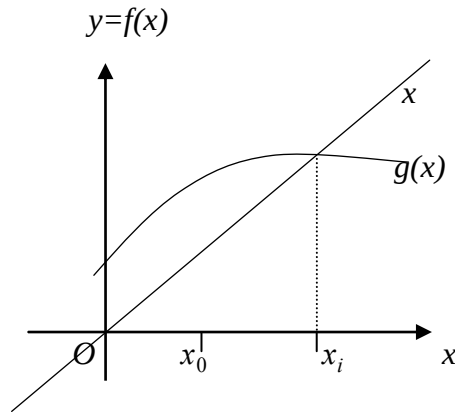
5.1.1.3 Basit İterasyon Yöntemi

Basit iterasyon yönteminde $f(x)$ gibi bir fonksiyonu sıfır yapan herhangi bir x bağımsız değişkenin $x = x_i$ değerini (*kökünün*) hesaplamak için; önce bu fonksiyon $f(x)=0$ şeklinde bir denklem olarak düşünülerek; $f_1(x) - f_2(x) = 0$ koşuluna uygun $f_1(x) = f_2(x)$ gibi iki bileşen fonksiyona ayrılır. $F(x)$ fonksiyonunun bu şekilde iki bileşen fonksiyona ayrılmasında,

$f_1(x) = x$: koordinat sisteminin orijininden geçen ve eğimi bir olan bir doğru,
 $f_2(x) = g(x)$: arda kalan terimlerden oluşan fonksiyonu göstermek üzere,

$x = g(x)$ şeklinde yapılırsa; tüm işlemler daha basit ve kolay halde olmaktadır. Bu nedenle, basit iterasyon yöntemine göre doğrusal olmayan denklemler önce bu özellikteki iki basit bileşen fonksiyona ayrılır. Sonra, bu iki fonksiyonun kesişim noktasının x_i apsis değeri, denklemin aranan bir kökü ya da fonksiyonu $f(x_i) = 0$ sıfır yapan bir değer olacağından bu iterasyon fonksiyonlarından hesaplanır.

$F(x) = 0$ denkleminin bu yöntemle bir köküne ulaşabilmek için, x_i gerçek kökü civarındaki x_0 yaklaşık bir kök değeri daha önce verilmiş yada belirlenmiş olduğundan, ilk iterasyon adımı bu x_0 yaklaşık kök değeri kullanılarak; $x = g(x)$ iterasyon eşitliğine göre ;



Grafik 3: Kök Değerine Yaklaşma

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

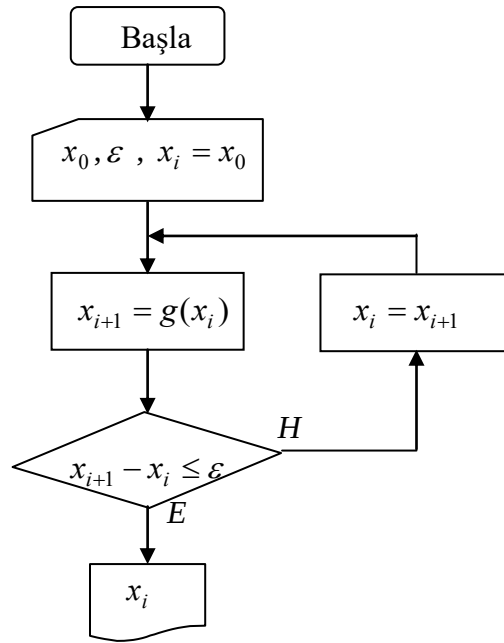
$$x_3 = g(x_2)$$

:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

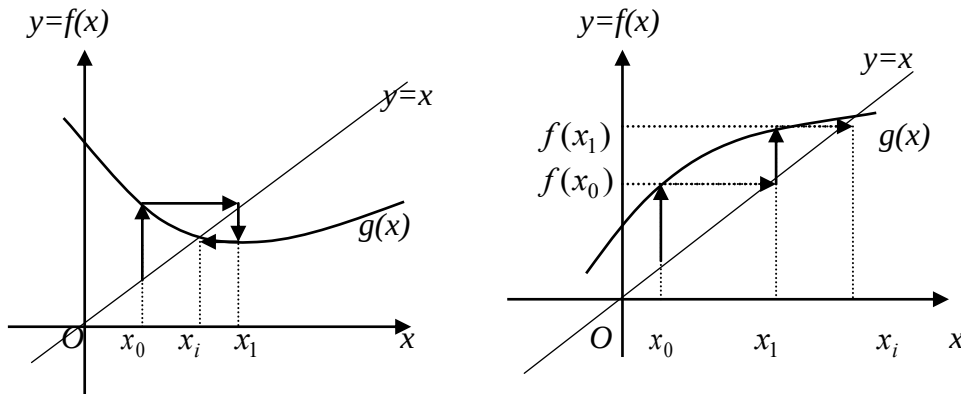
adımlar halinde iterasyon işlemleri yapılarak, her adımın sonucunda bir kök değeri hesaplanır. Bu şekilde iterasyonla yapılacak çözümün yakınsak olması halinde; aranan x_i kesin yada gerçek kök değeri, ε sıfır yada kabul edilebilir çok küçük bir değer olmak üzere; $x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon$ olduğu durumda, iterasyon işlemi durdurularak son adımdan elde edilmiş olan x_i değeri, bu fonksiyonu sıfır yapan bir değer; yani kök olarak alınır.

Bu şekildeki bir iterasyon hesabında; yapılacak işlemler veya hesaplamaların bilgisayarla yapılmasında yazılacak çözüm programının algoritması tekniği yönünden daha uygun olacağı düşüncesi ile;



Diyagram 2: Algoritma Çözümü

şeklinde bir hesap algoritması verilebilir. Böyle bir hesap algoritmasına göre yapılan işlemler grafik olarak;



Grafik 4: Köklere İteratif Yaklaşma

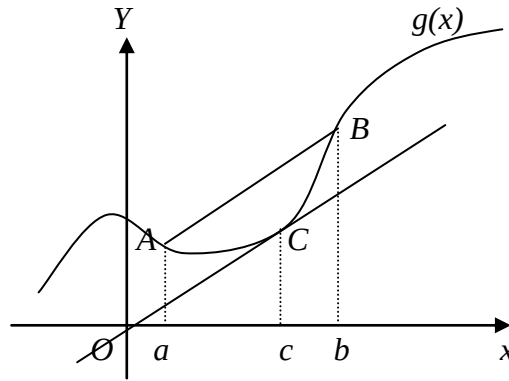
görsel olarak farklı biçimlerde gösterilebilir.

Neticede; Basit iterasyon yöntemine göre bir fonksiyonun kökünü bulmada koşul, x doğrusu ile $g(x)$ fonksiyonlarının en az bir noktada birbirini kesmeleri gerekmektedir. Bu özellik basit iterasyon yönteminin yakınsaması olarak bilinir.

Bilindiği gibi, ortalama değer teoremine göre; bir $g(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve bu aralığın herhangi bir noktasında türevi mevcut ise; $a < c < b$ aralığındaki herhangi bir c değeri için,

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

eşitliğini sağlayan en az bir nokta bulunmaktadır. Bu bağıntı aynı zamanda, $A(a, g(a))$ ve $B(b, g(b))$ noktalarından geçen bir doğrunun eğimi olmaktadır.



Grafik 5: $a < c < b$ Aralığında Kiriş ve Eğim İlişkisi

Buradan,

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b - a)$$

şeklinde elde edilecek bir kural; basit iterasyon yöntemine göre yapılacak iteratif çözüme uygulanarak,

$$x_1 = g'(x_0) , x_2 = g'(x_1) , \dots, x_{i+1} = g'(x_i)$$

olacağı göz önüne alınarak, herhangi bir i . İterasyon adımı sonucunda elde edilen (x_{i-1}, x_i) gibi bir aralık için yeni sınır değerleri $a = x_{i-1}$ ve $b = x_i$ olacaktır. Buna göre de $x_{i-1} < c < x_i$ olacak ve bu noktalardan geçecek doğrunun eğim bağıntısı da benzer şekilde,

$$\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = g'(c)$$

olacaktır. Sonuçta;

$$g(x_i) = g(x_{i-1}) + g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

olduğu yazılabilecektir. Diğer taraftan, $x_{i+1} = g'(x_i)$ ve $x_i = g'(x_{i-1})$ olduğundan.

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

eşitliği de mevcut olacaktır. Sol taraftaki değerlerin yerine iterasyon değerleri yazıldığında bu bağıntı,

$$x_{i+1} - x_i = g'(c)(x_i - x_{i-1})$$

veya

$$|x_{i+1} - x_i| = |g'(c)|(x_i - x_{i-1})$$

şeklinde de ifade edilebilecektir.

Sonuçta, bu durumun her bir iterasyon adımı için geçerli olacağı rahatlıkla söylenebilir. Bu yolla gerçek kök değerini bulabilmek için $|x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0$ sıfıra yakınsaması ne neticede sıfır olması gerekir. Bunu böyle olması için, her iterasyon adımı sunucunda elde edilen bu farkın, bir önceki adımdan elde edilmiş olan farktan daima küçük olması gerekir. Böyle bir koşulun gerçekleşmesi için de $g'(c) < 1$ olması gerekmektedir.

Uygulamada bu koşul; çözüme başlamadan önce; ilk iterasyon adımının başında, $c = x_0$ alınarak $|g'(x_0)| < 1$ koşuluna bakılarak karar verilir. Eğer bu koşul, $f(x) = 0$ denkleminin kökü civarında sağlanıyor ise, bu yöntemle en az bir köke ulaşılacağı söylenir. Sonuçta bu özellik; basit iterasyon yöntemiyle kök bulmada yeterli bir koşul olmasına rağmen, gerekli bir koşul da olmamaktadır.

Bir $f(x)$ fonksiyonunu $f(\bar{x}) = 0$ yapan $\bar{x}$ gerçek kökünü basit iterasyon yöntemiyle iteratif olarak hesaplamada,

x_i ; i . İterasyon adımıda hesaplanan kök değeri

Δx_i ; i . Adımda kökün hesaplanan kök değerinin hatası

olmak üzere; $\bar{x}$ gerçek kök değeri ile i . İşlem adımından hesaplanan herhangi bir kök değeri arasında; $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ genel hata tanımından faydalanarak, $x_i = \bar{x} + \Delta x_i$ şeklinde bir ilişki yazılabilir. Bu ilişki, iterasyon fonksiyonunda dikkate alınarak; yapılan Taylor seri açılımından;

$$g(x_i) = g(\bar{x} + \Delta x_i) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2!}g''(\bar{x})\Delta x_i^2 + \dots$$

seri değeri elde edilir. Bu Taylor ifadesinde; Δx_i değerleri küçük miktarlar olduklarından, yüksek dereceli terimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri de küçük olduğundan ihmal edilebilirler. Bu durumda hata hesabı için,

$$g(x_i) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2!}g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

şeklinde elde edilmiş olan ikinci dereceden bir Taylor ifadesi ile yetinilmektedir. Burada; $x_{i+1} = g(x_i)$ ve $\bar{x} = g(\bar{x})$ olduğu dikkate alınır;

$$x_{i+1} - \bar{x} = g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2}g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

elde edilir. Bu bağıntının sol tarafındaki $x_{i+1} - \bar{x} = \Delta x_{i+1}$ farkı, yani; $i+1$. iterasyon adımındaki,

$$\Delta x_{i+1} = g'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2}g''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

iterasyon hatası olmaktadır. Buradan görüldüğü gibi bu değer, bir önceki iterasyon adımında yapılan hata miktarına bağlı olmaktadır. Özetle; basit iterasyon yöntemine göre kök hesaplamadaki hata; bir önceki hataya bağlı olduğu görülür.

Örnek 1; $f(x) = 4e^{-0.5x} - x$ fonksiyonun $x_0 = 3$ civarındaki bir kökünü basit iterasyon yöntemi kullanılarak $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1; Basit iterasyon yöntemiyle bu fonksiyonun bir kökünü bulabilmek için önce,

$$f(x) = 4e^{-0.5x} - x = 0$$

şeklinde bir denklem halinde yazılarak;

$$x = 4e^{-0.5x}$$

gibi iki basit fonksiyona ayrılır. Bu durumda; $g(x) = 4e^{-0.5x}$ olur. Buradan; $g'(x_0)$ değerini bulmak için, logaritması alınarak,

$$\ln g(x) = \ln 4 - 0.5x \ln e$$

ve burada $\ln e = 1$ olduğundan,

$$\ln g(x) = \ln 4 - 0.5x$$

x değişkenine göre türevi alınır,

$$\frac{\partial \ln(g(x))}{\partial x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = -0.5$$

$$g'(x) = g(x)(-0.5) = (-0.5)4e^{-0.5x} = -\frac{2}{e^{0.5x}} = -\frac{2}{e^{1.5}}$$

olur. Buna göre de;

$$|g'(x_0)| = \left| -\frac{2}{e^{1.5}} \right| = |-0.446| < 1$$

koşulu sağlandığından bu fonksiyon $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civarında yakınsak olduğu söylenebilir. Sonuçta; Basit iterasyon yöntemiyle $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civardaki gerçek bir kökü aşağıdaki gibi bulunabilir. Bu kök;

x	$g(x) = 4e^{-0.5x}$	$x_{i+1} - x_i \leq 0.05$
3	0.89	2.1
0.89	2.56	1.67
2.56	1.11	
:	:	:
:	:	:
1.7	1.7	$x_i - x_{i-1} \leq 0.05$

Tablo 3: İteratif Çözüm

olması koşulu 25. iterasyon adımında sağlanarak, bu fonksiyonun bir kökü $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile $x_i = 1.7$ olarak hesaplanabilir.

Örnek 2; $f(x) = 4 \ln x - x$ fonksiyonunu $x_0 = 3$ başlangıç yada diğer adıyla yaklaşık kökü civarındaki gerçek bir kökünü basit iterasyon yöntemi kullanılarak $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 2; Bu fonksiyon $f(x) = 4 \ln x - x = 0$ şeklinde sıfıra eşitlenip bir denklem olarak yazıldıktan sonra;

$$x = 4 \ln x$$

biçiminde iki bileşene ayrılabilir. Buradan; $f(x)$ fonksiyonun basit iterasyona yöntemine göre; bu yaklaşık kökü civarındaki bir gerçek kökünü bulmada yakınsayıp, yakınsamayacağını önceden görebilmek için;

$$g(x) = 4 \ln x \text{ ve } g'(x) = 4 \frac{1}{x} \Big|_{x=x_0}$$

elde edilerek; $x_0 = 3$ için değeri,

$$g'(x_0) = \frac{4}{3} > 1$$

ıraksak olduğu bulunur. Buradan; $f(x)$ fonksiyon $x_0 = 3$ yaklaşık kökü civarında yakınsamadığı, yani ıraksadığı söylenebilir. Bunun böyle olduğu,

x	$g(x)=4\ln x$	$x_{i+1} - x_i \leq 0.05$
3	4.39	1.39
4.39	5.92	1.53
5.92	7.11	1.19
:	:	:
:	:	:

Tablo 4: İteratif Çözüm

şeklinde yapılan sayısal iterasyon çözüm işlemlerden da açıkça görülebilir.

Örnek 3; $f(x) = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonunu $x_0 = 1.5$ civarındaki bir kökünü basit iterasyon yöntemine göre $\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 3; Bu fonksiyon önce, $f(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$ şeklinde yazılır ve sonra basit iterasyon yönteminin $x=g(x)$ şeklinde verilmiş olan temel ilkesine göre iki bileşene ayrılır. Bu amaçla; $f(x)$ fonksiyonun iki bileşenine ayrılmasında birbirinden farklı şekilde ayırma işlemleri yapılabilir. Bunlar;

a) $4x = x^2 + 4$; $x = 0.25x^2 + 1$ buradan $g(x) = 0.25x^2 + 1$
 $|g'(x_0)| = 0.50x|_{x=x_0} = |0.50x_0| = |0.75| < 1$

çözüm yakınsamaktadır. Buradan çözüm yapıldığında;

x	$g(x) = 0.25x^2 + 1$	$x_{i+1} - x_i \leq 0.05$
1.5	1.56	0.06
1.56	1.61	0.05
1.61	1.65	0.04

Tablo 5: İteratif Çözüm

$\varepsilon = 0.05$ mutlak hata ile 3. iterasyon adımı sonucunda kök değeri $x = 1.65$ olarak bulunur.

b) $x^2 = 4x - 4$; $x = \pm\sqrt{4x - 4}$ ” $g(x) = \pm\sqrt{4x - 4}$

$$|g'(x)| = \left| \frac{2}{\sqrt{4x-4}} \right|_{x=x_0} = \left| \frac{2}{\sqrt{2}} \right| = |\sqrt{2}| = |1.41| > 1$$

ve çözüm ıraksaktır. Buradan; iterasyon hesabı yapıldığında;

x	$g(x) = \sqrt{4x-4}$	$x_{i+1} - x_i \leq 0.05$
1.5	1.414	
1.414	1.287	-0.086
1.287	1.071	-0.127
1.071	0.533	-0.216
0.533	<i>kök içi negatif</i>	<i>Iraksamaktadır</i>

Tablo 6: İteratif Çözüm

iterasyonun yakınsamadığı tekrar görülür.

$$c) \quad x^2 - 4x = -4 \quad ; \quad x = -\frac{4}{x-4} \quad , \quad g(x) = -\frac{4}{x-4}$$

$$|g'(x)| = \frac{4}{(x-4)^2} \Big|_{x=x_0} = \frac{4}{6.25} = |0.64| < 1$$

çözüm yakınsamaktadır. Buradan çözüm yapıldığında;

x	$g(x) = -\frac{4}{x-4}$	$x_{i+1} - x_i \leq 0.05$
1.5	1.6	
1.6	1.667	0.1
1.667	1.715	0.067
1.715	1.750	0.048

Tablo 7: İteratif Çözüm

aranan kök değeri $\varepsilon < 0.05$ mutlak hata ile 4. iterasyon adımı sonucunda $x = 1.75$ olarak hesaplanmaktadır.

Buradan görüldüğü gibi; çözüm için bunlardan hangisi yakınsak ise, basit iterasyon çözümü ona göre yapılır. Yakınsak olanlarından $|g'(x)|$ türev değeri kısa sürede yakınsamaktadır.

5.1.1.4 Newton- Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yönteminde bir fonksiyonun belli bir değere göre *Taylor* seri açılımından faydalanılmaktadır. Bu amaçla, $f(x)$ gibi bir fonksiyon $x = x_0 + h$ yaklaşık değerine göre *Taylor serisine* açılarak,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots$$

seri ifadesi elde edilir. Bu seride x_0 başlangıç değerinin uygun şekilde, yani $x - x_0 = h$ değerinin küçük bir değer seçilmiş olması durumunda; seri birinci dereceden terimde yakınsayacağından, burada iki yada daha yüksek dereceden terimler göz ardı edilebilir. Bu durumda birinci dereceye kadar terimlerden oluşan *Taylor* serisi,

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h$$

olarak elde edilir. Buradan; $f(x)$ fonksiyonunu $f(x)=0$ yapan bir değeri yada kökü;

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h = 0$$

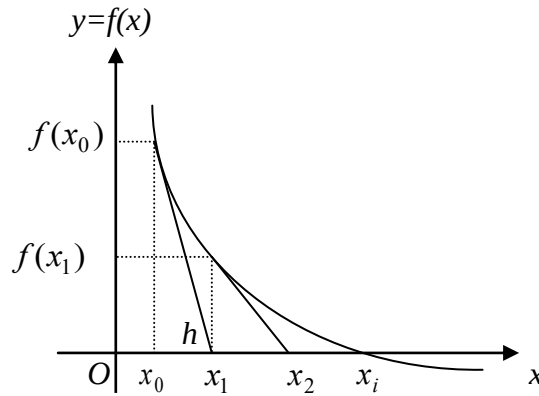
yaparak,

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilen h değerinin $x - x_0 = h$ de dikkate alınması ile

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

eşitliğinden bulunabilir. Aynı zamanda bu eşitlik *Newton-Raphson* yönteminin de temel bağıntısı olmaktadır. Ancak, bu bağıntının elde edilmesinde, Taylor seri açılımında; x yerine başlangıç değeri olarak x_0 gibi bir yaklaşık değerin kullanılmış olması yanında birinci dereceye kadar olan terimlerinin dikkate alınmış olması bunun ilk adımında $f(x)=0$ yapan bir x değeri içinde tam bir çözüm olamayacağını göstermektedir. Bu durumda, tam çözüm; ancak bu bağıntının iteratif bir şekilde uygulanması ile bulunabilir.



Grafik 6: Köke İteratif Yaklaşma

Böyle bir çözümde; x_0 başlangıç yada ilk yaklaşık kök olmak üzere;

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\&\vdots \\x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\end{aligned}$$

$x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon$ şeklinde verilmiş olan, bir sonraki adımdan elde edilen değerle bir önceki adımdan bulunan değerin öngörülen, hata sınırından küçük oluncaya kadar iterasyon işlemlerine devam edilerek bulunur.

Buradan görüldüğü gibi; bu yöntemde gerçek kök değerine, fonksiyonun çizdiği eğriye x_0 gibi ilk başlangıç değerinden başlayarak, eşit aralıkta apsis değerine karşılık gelen noktalarda, eğriye teğet doğrularla iteratif olarak yaklaşılmaktadır. $x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon$ değeri bir önceki iterasyondan bir sonraki iterasyona geçişte gittikçe küçülüyor ise, çözüm yakınsak olmaktadır. Aksı halde ıraksak olur ve çözüm vermez. Bu durum, yani yakınsamanın olup, olmadığı; iterasyon işlemlerine başlamadan önce araştırılır. Böyle bir işlem için, *Newton-Raphson* yönteminde kullanılan;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

iterasyon fonksiyonu, basit iterasyon yönteminde olduğu gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun bir tarafı bir doğru denklemini gösterecek şekilde iki bileşen fonksiyonuna ayrılmış şekli gibi düşünülebilir. Sağ tarafındaki ifade de; x_i değeri için x değişken gösterimi kullanıldığında,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

olarak yazılabilir. Basit iterasyon yönteminde, bir $g(x)$ fonksiyonun yakınsak olabilmesi için, $|g'(x_0)| < 1$ koşulu bulunmaktadır. Bu özellik, *Newton-Raphson* yönteminde çözüme esas olan iterasyon fonksiyonunun aynı yapıda olması nedeniyle, burada da geçerliğini korumaktadır. Buna göre;

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

alınarak, $|g'(x_0)| < 1$ koşuluda göz önünde bulundurularak yapılan işlemlerden bir fonksiyonun, $f(x)=0$, sıfır yapan bir kök değerlerini hesaplarken, yapılacak

iterasyon işlemlerinin bir işlem adımından bir sonraki işlem adımına geçerken yakınsak olması için iterasyonun yapıldığı her işlem adımında;

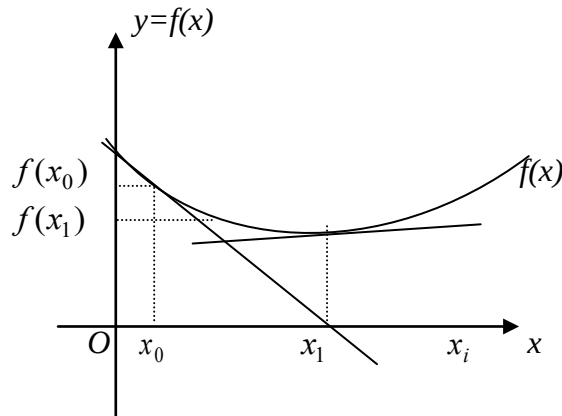
$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

koşulunu sağlanmış olması gerekmektedir. Aynı şekilde; başlangıçta verilmiş olan; x_0 ilk yaklaşık kök değeri için de bu koşulu;

$$\left| \frac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1$$

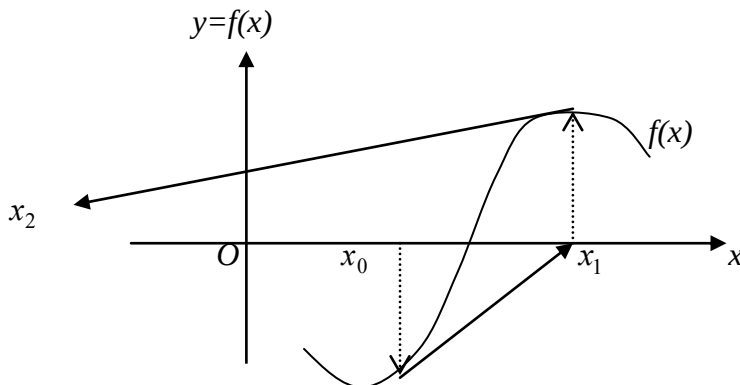
sağlaması gerekmektedir.

Uygulamada; bu yolla bir fonksiyonun kök değerlerini hesaplama işlemlerine başlamadan önce bu koşulun varlığının araştırılması gerekir. Koşulun geçerli olmasında ancak en az bir köke ulaşılır. Aksi halde; Koşulun geçerli olmadığı durumda çözüm aranmamalıdır. Bu duruma örnek olarak;



Grafik 7a: Iterasyonda Iraksama

ya da diğer bir çok örneklerden biri olarak;



Grafik 7b: Iterasyonda Iraksama

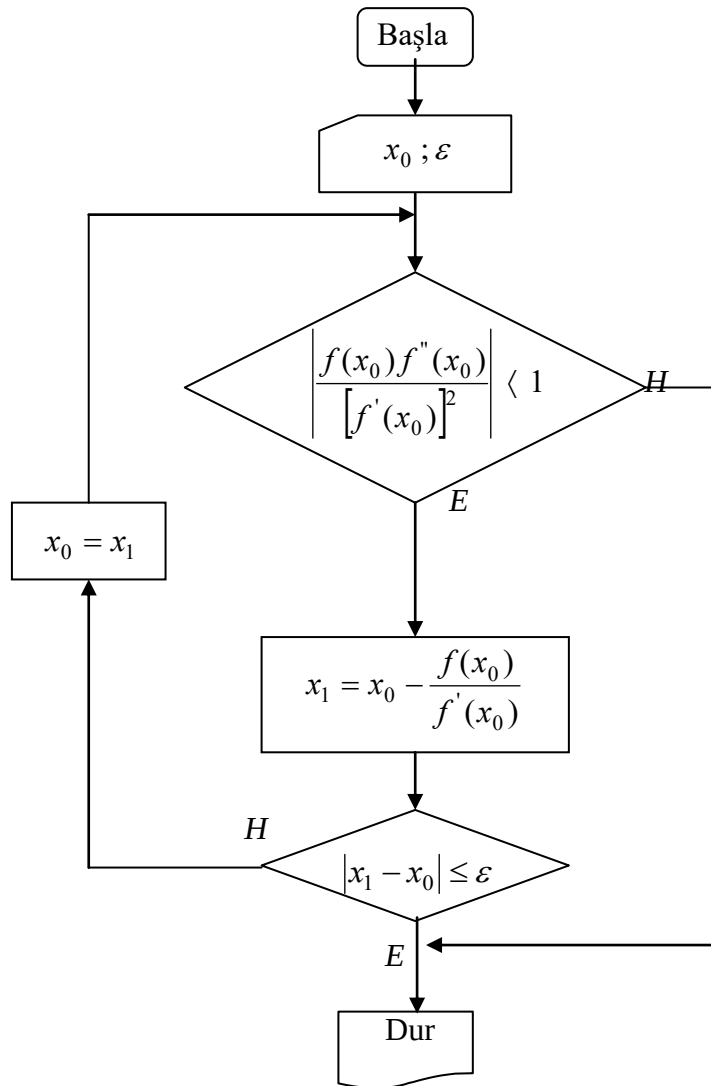
özelliklerine sahip fonksiyonlar verilebilir.

Buradan görüldüğü gibi bazı durumlarda, kökü bulunacak denklemin özelliği gereği; *Newton-Raphson* yöntemine göre kök hesaplama işlemleri yakınsamaz. Sonuçta, kök değeri de hesaplanamaz. Çözümün yakınsak olduğu bazı durumlarda, başlangıç değerinin iyi seçilememesi veya fonksiyonun analitik özelliği gereği kök bulma işleme kolay yakınsamaz. Böyle durumlarda, bir çözüme ulaşabilmek için fazla iterasyon işlemleri yapmak gerekir. Bu gibi durumlarda, hesaplama işlemlerindeki zorlukların artık sorun olmaktan çıkarmak için, hızlı hesaplayıcıların yanında uygun bir işlem algoritmasının da kullanılması kaçınılmaz olur. Böyle bir algoritma aşağıdaki gibi düşünülebilir.

Newton-Raphson yönteminde $f(x)$ gibi sürekli ve ilk iki türevi olan bir fonksiyonun $f(\bar{x}) = 0$ yapan $\bar{x}$ gerçek kökünü hesaplamak için,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

iterasyon bağıntısından faydalanarak, çözüm iteratif olarak yapılmaktadır.



Diyagram 3: Algoritma Çözümü

Herhangi bir iterasyon adımı sonucunda hesaplanan yaklaşık kök değeri de x_i olmaktadır. $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$; i. adımda hesaplanan x_i yaklaşık kök değerinin mutlak hatası olmak üzere; gerçek kök değeri için $\bar{x} - x_i + \Delta x_i$ yazılabilir. Bu ilişki, $f(x)$ fonksiyonunda dikkate alınarak; yapılan *Taylor* seri açılımından;

$$f(\bar{x}) = f(x_i + \Delta x_i) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!}f''(x_i)\Delta x_i^2 + \dots$$

seri değeri elde edilir.

Taylor ifadesinde; Δx_i değerleri küçük miktarlar olduklarından, yüksek dereceli terimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri de küçük olacağından ihmal edilebilirler. Bu durumda hata hesabı için,

$$f(\bar{x}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!}f''(x_i)\Delta x_i^2$$

şeklinde elde edilmiş olan ikinci dereceden bir ifadesinin kullanılması yeterli olur. Burada; $f(\bar{x}) = 0$ olduğu dikkate alınır;

$$f(x_i) + f'(x_i)\Delta x_i + \frac{1}{2!}f''(x_i)\Delta x_i^2 = 0$$

yazılır. Her tarafın $f'(x_i)$ değerine bölünmesinden

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \Delta x_i + \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \Delta x_i^2 = 0$$

elde edilir. Burada; iterasyon fonksiyonundan;

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x_i - x_{i+1} \quad \text{ve} \quad \Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

hesaplanan değerler yerlerine yazıldığında $\Delta x_{i+1} = \bar{x} - x_{i+1}$ bir sonraki hesap adımının mutlak hatası

$$\Delta x_{i+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \Delta x_i^2$$

olarak ifade edilir. Sonuçta; *Newton-Raphson* yöntemine göre kök hesaplamadaki mutlak hata; bir önceki adımdaki mutlak hataya karesel olarak bağımlı olmaktadır.

Örnek 1: $\sqrt{2} = ?$ kök değerini, $x_0 = 1$ başlangıç değerini kullanarak, 0.05 mutlak hata ile *Newton-Raphson* yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 1: Bu sayını $\sqrt{2} = x$ ise; her iki tarafın karesi alındığında, $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonu elde edilir. $\sqrt{2} = x$ yaklaşık kök değerlerini *Newto-Raphson* yöntemine göre hesaplamak için; $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınarak;

$$f'(x) = 2x \text{ ve } f''(x) = 2$$

elde edilir.

Bu çözümün yakınsayıp yakınsamayacağını önceden kestirebilmek için,

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

koşulundan faydalanarak,

$$\left| \frac{f(1)f''(1)}{[f'(1)]^2} \right| = \left| \frac{(-1)(2)}{(2)^2} \right| = |0.5| < 1$$

Olduğu görülür. Sonuçta iterasyon çözümü yakınsayacaktır denir. Buradan tablodaki gibi hesaplamalar yapılarak,

x	$h = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^2 - 2}{2x}$	$x = x_0 + h$	$x_{i+1} - x_i$
1	0.5	1.5	0.5
1.5	-0.083	1.4167	-0.083
1.4167	-0.0025	1.4142	-0.0025

Tablo 8: *İteratif Çözüm*

aranan kök değeri 0.05 mutlak hata ile 3. iterasyon adımı sonucunda **$x=1.4142$** olarak hesaplanır.

Örnek 2: $f(x) = x^3 - 7$ fonksiyonunu sıfır yapan bir kök değerini, $x_0 = 1.5$ başlangıç değerini kullanarak, 0.05 mutlak hata ile *Newton-Raphson* yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm 2: Bunun için fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi alınarak; $f'(x) = 3x^2$ ve $f''(x) = 6x$ olarak elde edilir. Buradan; $x_0 = 1.5$ başlangıç değeri için,

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| = \left| \frac{f(1.5)f''(1.5)}{[f'(1.5)]^2} \right| = \left| \frac{(-3.625)(9)}{(6.75)^2} \right| = |-0.72| < 1$$

koşulu hesaplanarak, itersyonun yakınsayacağına karar verilir.

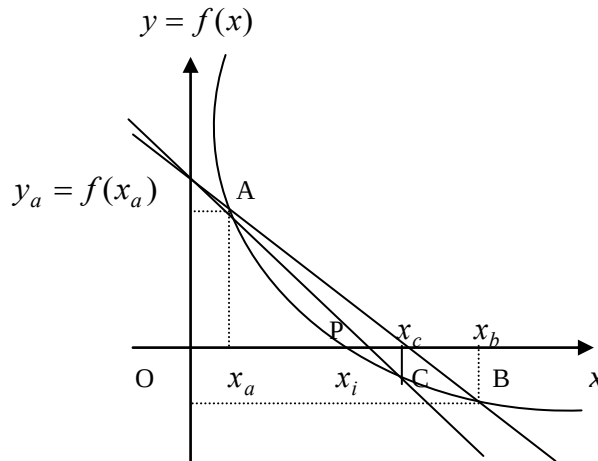
x	$h = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^3 - 7}{3x^2}$	$x = x_0 + h$	$x_{i+1} - x_i$
1.5	0.537	2.037	0.537
2.037	-0.117	1.920	-0.117
1.920	-0.007	1.913	-0.007

Tablo 9: İteratif Çözüm

Buradan , aranan kök değerinin 0.05 mutlak hata ile 3. iterasyon adımı sonucunda **x=1.913** olarak hesaplanır.

5.1.1.5 Kirişler Yöntemi

Bazı kaynaklarda “Regula Falsi” yada “Değişik işaretli” çözüm yöntemi olarak da adlandırılan Kirişler yöntemine göre $f(x)$ gibi bir fonksiyonun $x_a < x < x_b$ aralığında $f(x)=0$ yapan bir kök değerini hesaplamak için, önce x_a ve x_b sınır değerlerine karşılık gelen $y_a = f(x_a)$ ve $y_b = f(x_b)$ fonksiyon değerleri, diğer bir ifade ile bu değerlere karşılık gelen noktaların koordinatları hesaplanır. Fonksiyon değerlerinin; $x_a < x < x_b$ aralığında, $f(x_a)f(x_b) \leq 0$ koşulunu sağlanmış olması; bu aralıkta fonksiyonu sıfır yapan en az bir kökünün bulunmasını gösterir.



Grafik 8: Köke İteratif Yaklaşma

Çözüm için; bu sınır noktalarından (A ve B noktalarından) geçen doğrunun, diğer adıyla kirişin denklemi,

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{x - x_a}$$

bağıntısından faydalanarak,

$$y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a)$$

olarak yazılabilir. Buradan, AB kirişinin x eksenini kestiği noktanın koordinatları, kiriş denkleminde $y = 0$ alınarak buna karşılık gelen apsis değeri,

$$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$$

olarak elde edilir.

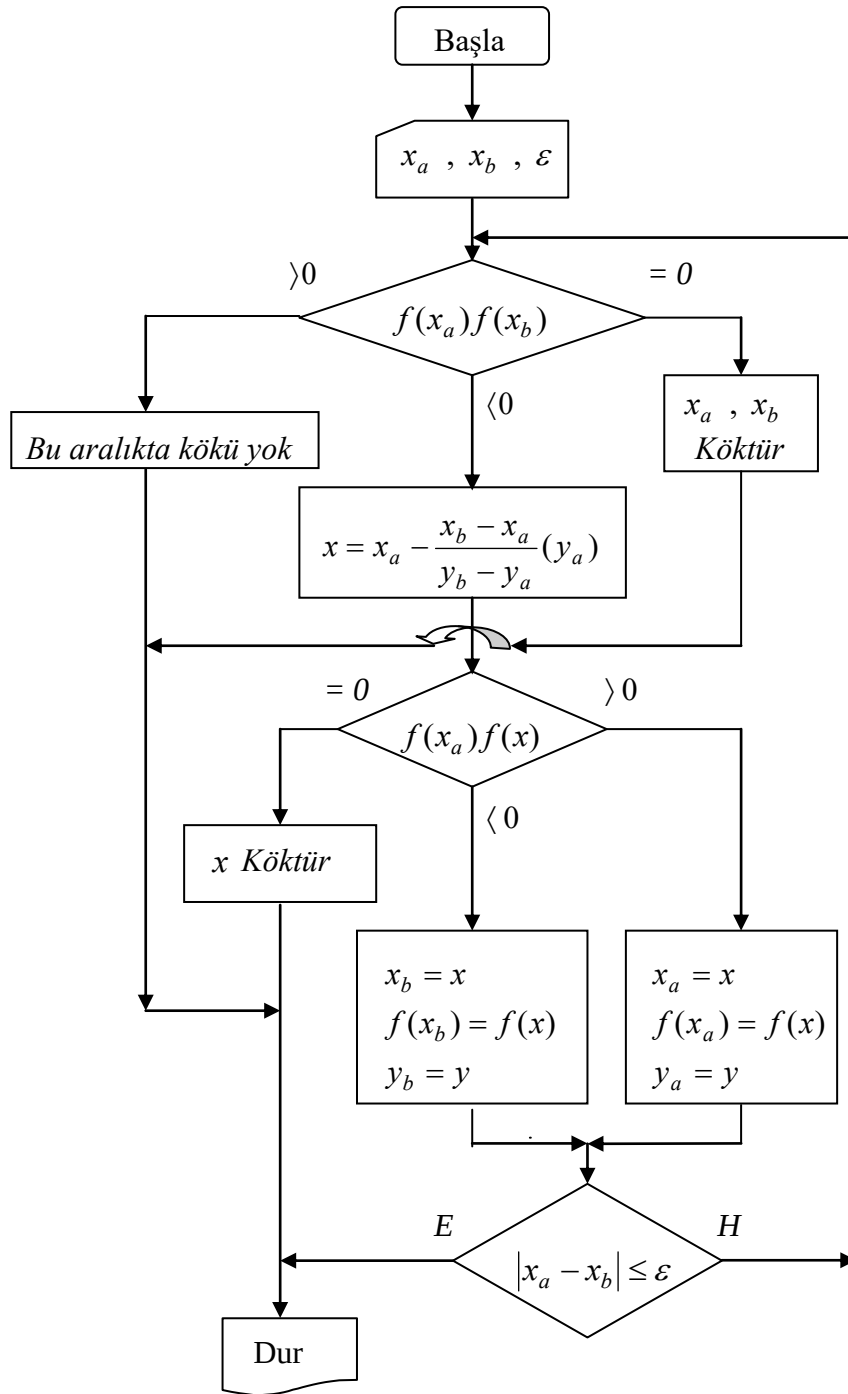
Burada vurgulamak gerekir ki; sıfıra bölme gibi bir işlem belirsizliği kuşkusu yaratabilecek olan $y_b - y_a$ farkı; y_a ve y_b değerlerin sürekli zıt işaretli olması nedeniyle hiçbir zaman söz konusu olmamaktadır.

Neticede; bu şekilde kirişin x eksenini kestiği nokta için hesaplanmış olan x apsis değeri; A ve B noktalarının tanımladığı kirişin lineer bir fonksiyon özelliğinde olmasına karşın; $f(x)$ farklı özellikte herhangi bir eğriyi temsil eden bir fonksiyon olmaktadır. Neticede; $f(x)$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktanın apsisi ile kirişin x eksenini kestiği noktanın apsisi aynı olmamaktadır. Bu iki noktanın apsisi $x \neq x_i$ farklı değerler olur.

Böyle durumlarda; $f(x)$ fonksiyonun x eksenini kestiği noktanın x_i apsis, ya da diğer bir ifade ile $f(x)=0$ sıfır yapan bir değeri, A ve B noktalarının tanımladığı kirişin $y=0$ alınarak elde edilmiş olan; x eksenini kestiği noktanın x apsis değeri $x_c = x$ alınarak hesaplanan C noktasının apsisi $f(x)$ fonksiyonunda yerine yazılarak ordinatı $y_c = f(x_c)$ hesaplanır.

Böylece $f(x)$ fonksiyonu üzerinde, fonksiyonun x eksenini kestiği noktaya bir derece daha yakın C gibi yeni bir nokta koordinatları ile birlikte tanımlanmış olur. Sonra, yukarıda yapılan işlemler; C ve B noktalarının tanımladığı kiriş için yeniden yapılarak, her seferinde $f(x)=0$ noktasına bir adım daha yaklaşılr. Bu işlemler, iteratif bir şekilde uygulanarak, bir önceki adımda hesaplanan değer bir sonraki adımdan hesaplanan değerden farkı sıfır oluncaya kadar, başka bir ifade ile çözüm sonucunda hesaplanan değerin $f(x)=0$ yapan x_i değerine ulaşınca kadar bütün işlemlere devam edilir. Ön görülen koşullar gerçekleştiği anda iterasyon işlemleri durdurularak aranan sonuca, işlem akış diyagramından görüldüğü gibi, sistematik bir şekilde ardışık çözüm işlemleri yaparak iteratif olarak ulaşılmış olunur.

Bu yöntemle kök hesaplamada $f(x)$ fonksiyonun eğriliği ne kadar az ise; bir diğer ifade ile doğruya ne kadar yakın ise; yakınsaması o kadar kısa zamanda olmaktadır. Birkaç adımda hemen sonuca ulaşılmaktadır.



Diyagram 4: Algoritma Çözümü

Bu durum; matematik olarak; bir eğrinin kartezyen koordinat sisteminde ifade edilmiş olan,

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(x)}{\{1 + f'(x)^2\}^{3/2}}$$

bağıntısı ile açıklanabilir.

Burada; $f'(x)$ büyük, $f''(x)$ küçük değerler olması halinde, çözüm o kadar kısa zamanda bulunacağından, yukarda söylenenlere benzer şekilde, eğriliği az olduğundan çabuk yakınsayacağı söylenebilir.

Bu yöntemle iteratif olarak hesaplanan kökün, herhangi bir iterasyondan hesaplanan yaklaşık değerinin mutlak hatasını hesaplamada, *Gregory_Newton* enterpolasyon bağıntısının ilk üç teriminden faydalanılarak i . iterasyon adımı için,

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_i)(x - x_{i-1})$$

ifadesi yazılabilir. $f(x)$ fonksiyonunun kök değeri $\bar{x}$ ise; $f(\bar{x}) = 0$ olur. Bu durumda; yukarıdaki bağıntıda; $x = \bar{x}$ alınarak,

$$f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(\bar{x} - x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin son terimi, diğer terimleri yanında çok küçük olacağından ihmal edilebilir. O zaman;

$$f(x_i) = -\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(\bar{x} - x_i)$$

kiriş denklemi elde edilmiş olur. sonuçta, girişin apsis eksenini kestiği değer olan x_{i+1} de bu denklemin üzerinde bir değer olacağından,

$$f(x_i) = -\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_{i+1} - x_i)$$

olarak bu bağıntıyı de sağlayacaktır. Bu değer daha önce verilmiş olan

$$f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(\bar{x} - x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) = 0$$

bağıntıda dikkate alınması ile;

$$-\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_{i+1} - x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(\bar{x} - x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) = 0$$

ve gerekli kısaltmalar yapılarak da

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(\bar{x} - x_{i+1}) + \frac{1}{2} f''(c)(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) = 0$$

bağıntısı bulunur.

Bu denklemin birinci terimi için; (x_i, x_{i-1}) aralığında ortalama değer teoremi dikkate alınarak,

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c)$$

$x_{i-1} < c < x_i$ koşulunu sağlayan bir c değeri için elde edilen değer, aynı bağıntının birinci teriminde yerine yazılarak,

$$f'(c)(\bar{x} - x_{i+1}) + \frac{1}{2} f''(c)(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Her bir adımdaki yaklaşık kök değerleri için;

$$\Delta x_{i+1} = \bar{x} - x_{i+1} ; \Delta x_i = \bar{x} - x_i \quad \text{ve} \quad \Delta x_{i-1} = \bar{x} - x_{i-1}$$

değerleri kullanılırsa,

$$\Delta x_{i+1} = \frac{f''(c)}{2f'(c)} \Delta x_i \Delta x_{i-1}$$

bulunmuş olur.

Sonuçta; İterasyon sayısı artıkça,

$$f'(c) \rightarrow f'(\bar{x}) \quad \text{ve} \quad f''(c) \rightarrow f''(\bar{x})$$

eşit olacağından en son adımda mutlak hata,

$$\Delta x_{i+1} = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})} \Delta x_i \Delta x_{i-1}$$

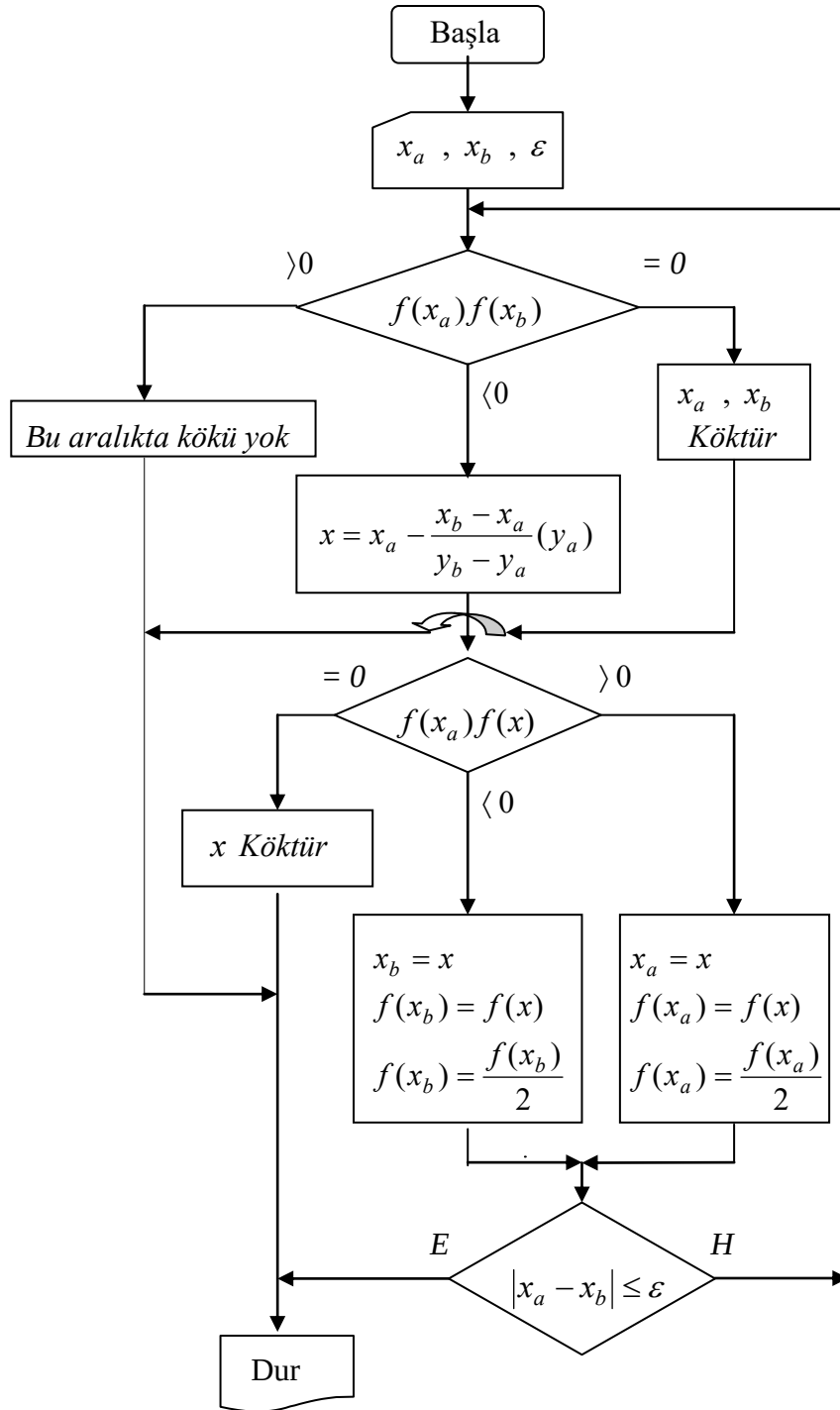
olacaktır.

Buradan; kırışlar yöntemiyle yapılan çözümde; bir adımın sonucunda yapılacak mutlak hatanın; bir ve iki adım önce yapılan mutlak hatalarla orantılı olduğu söylenebilir.

Bu şekliyle, kırışlar yöntemi çok eski yayınlarda bile yer almaktadır. Yöntemin olumlu yanı; bu yöntemle yapılacak çözümlerde her zaman bir kök değeri bulunabilmektedir. Buna rağmen bunun tenkit edilebilir diğer bir yanı ise, iterasyon işlemlerinin çok yavaş yakınsamış olmasıdır. Bu nedenle, çoğu zaman bazı kaynaklarda bu yönteme için “*a poor method*” ifadesi de kullanılmaktadır. bu şekliyle bilinen kırışlar yönteminde bazı değişiklikler yapılarak daha hızlı yakınsaması sağlanmış ve neticede bu yöntemin değişik uygulamaları olarak yeni yöntemler geliştirilmiştir.

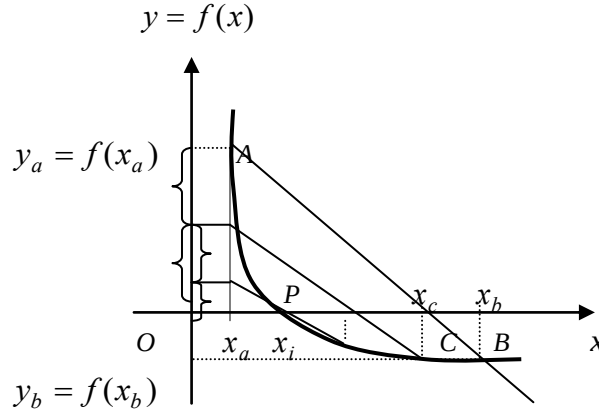
5.1.1.6 Değiştirilmiş Kirişler Yöntemi

Kirişler yöntemine göre yapılacak çözümün daha hızlı yakınsaması için; bu yöntemde yapılmış bazı değişikliklerin neticesinde elde edilen daha kısa sürede, hızlı yakınsayan “Değiştirilmiş kirişler yöntemidir”. Bu değişiklik; aşağıdaki işlem algoritmasında ve fonksiyonun verilen grafiğinden görüldüğü gibi, uygulama bazında olup, her bir yeni iterasyon işlemi adımında; kirişin sabit uçundaki fonksiyon değerinin sürekli ikiye bölünerek işlemlerin iteratif bir şekilde yapılması şeklindedir.



Diyagram 5: Algoritma Çözümü

Böylece; çözüm yönteminde yapılan bu tür değişiklikle, her iterasyon adımımda değiştirilmemiş kirişler yönteminden az farklı bir çözüm şekli elde edilmektedir.



Grafik 9: Köke İteratif Yaklaşma

Yapılan bu değişiklikler de gösterilerek çözüm algoritması bir akış diyagramı halinde aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Örnek 1; $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunu $(1, 2)$ aralığında sıfır yapan köklerinden birini, kirişler yöntemiyle, en fazla $\varepsilon = 0.001$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1: Bu fonksiyonun sınır değerleri için değeri hesaplandığında; $f(1) = -1$ ve $f(2) = 5$ elde edilmektedir. Sonuçta, bu aralıkta en az bir kökü bulunmaktadır. Bu kök değeri;

a) *değiştirilmemiş kirişler yöntemine göre hesaplandığında;*

x_a	x_b	$y_a = f(x_a)$	$y_b = f(x_b)$	$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$	$f(x)$
1	2	-1	5	1.17	-0.568
1.17	2	-0.568	5	1.255	-0.278
1.255	2	-0.278	5	1.294	-0.126
1.294	2	-0.126	5	1.311	-0.056
1.311	2	-0.056	5	1.319	-0.026
1.319	2	-0.026	5	1.323	-0.0098
1.323	2	-0.0098	5	1.324	-0.001

Tablo 10: İteratif Çözüm

b) *fonksiyon değerini yarıya bölerek hesaplandığında da*

x_a	x_b	$y_a = f(x_a)$	$y_b = \frac{f(x_b)}{2}$	$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$	$f(x)$
1	2	-1	2.5	1.2857	-0.1603
1.2857	2	-0.1603	1.25	1.3668	-0.1870
1.2857	1.3668	-0.1603	0.18703	1.323	-0.007
1.323	1.3668	-0.007	0.18703	1.324	-0.001

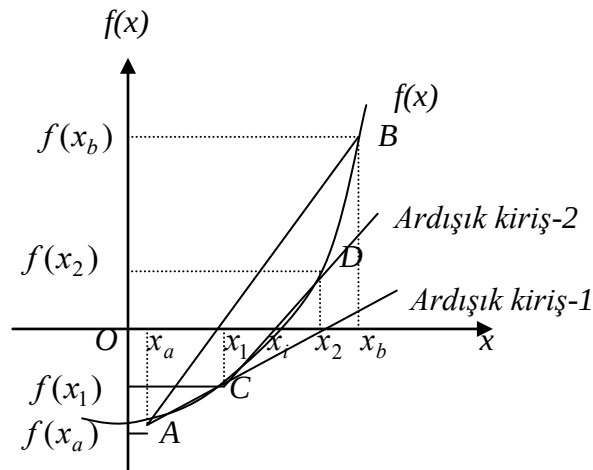
Tablo 11: *İteratif Çözüm*

şeklinde çözüm yaparak $\varepsilon = 0.001$ hata ile birinci çözümünden 7. iterasyon adımından ve ikinci çözümünden de 4. iterasyon adımından **$x=1.324$** olarak hesaplanır. Buradan bir kez daha görülmektedir ki;, fonksiyon değerini ikiye bölerek yapılan çözüm daha çabuk yakınsamaktadır.

5.1.1.7 Ardışık Kirişler Yöntemi

Bu yöntem bazı kaynaklarda; “*Değişken kesen yöntem*” yada sadece “*secant yöntemi*” olarak adlandırılmaktadır. Ardışık kirişler yönteminde; kirişler yönteminde olduğu gibi ilk iterasyon adımında kökün bulunduğu aralık $f(x_a)f(x_b) < 0$ araştırılmaktadır. Bu şekliyle, ilk adımda kirişler yöntemiyle aynı olmaktadır. Fakat ikinci ve daha sonraki adımlarda, “*değiştirilmemiş kirişler yönteminde olduğu gibi, köke yaklaşılan noktanın her iterasyon adımında değişken alınmasına karşılık diğer nokta daima sabit konumda olması öngörülmesine rağmen*”, bu yöntemde her iki noktanın da değişken alınarak köke her adımda yeni bir kirişle yaklaşılmaktadır.

Böyle bir işlem için; bir iterasyon adımından bulunan kök ve karşılık gelen fonksiyon değeri ile bir önceki adımdan hesaplanan kök ve fonksiyon değerleri kullanılarak bir sonraki adımdaki kök değeri hesaplanır.



Grafik 10: *Köke İteratif Yaklaşma*

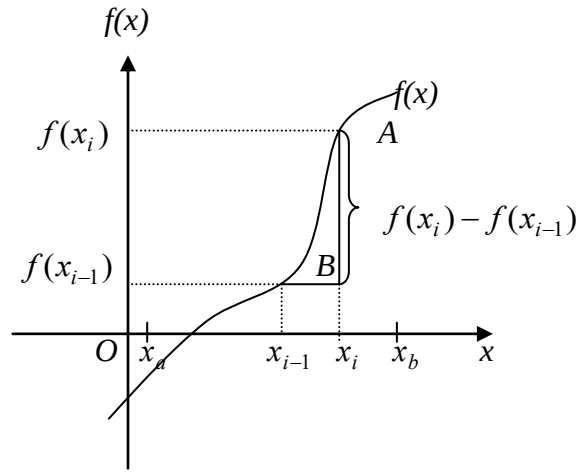
Bu tür bir bağıntının elde edilmesi için de; *Newton-Raphson* yönteminde verilmiş olan iterasyon bağıntısından faydalanılmaktadır. *Newton-Raphson* yönteminde; iterasyon bağıntısı olarak kullanılan,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

bağıntısında her zaman $f(x)$ fonksiyonunun türevine ihtiyaç vardır. Değişken kesen yönteminde; türev alma yerine; fonksiyon değerlerindeki sonlu artmalardan faydalanılır. Bu amaçla; fonksiyonun türevi,

$$f'(x) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

şeklinde ifade edilerek *Newton-Raphson* bağıntısında yerine yazılır.



Grafik 11: Sonlu Artım Değeri

Sonuçta; sonlu artım değerlerine göre ifade edilmiş olan,

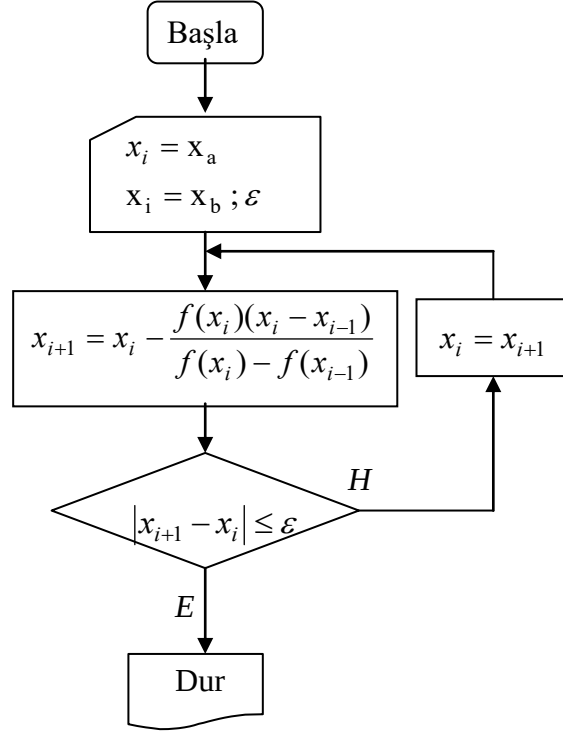
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

bağıntısı elde edilir.

Bu bağıntı *Değişken kesen yönteminin* iterasyon bağıntısı olmaktadır. Buna göre; herhangi bir $f(x)=0$ denkleminin kökü; ilk adımda seçilen bir başlangıç değerinden çözüme başlayarak iteratif bir şekilde, diğer yöntemlerde olduğu gibi, hesaplanır.

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$$

olduğu durumda iterasyona son verilerek aranan çözüm bulunmuş olur. Bu yöntemle ilgili bir işlem algoritması aşağıdaki gibi verilebilir.



Diyagram 6: Algoritma Çözümü

Buradan görüldüğü gibi; bu yöntem kirişler yöntemine benzer bir çözüm yöntemi olmaktadır. Verilen aralıktaki kök değerini hesaplamada daha hızlı bir yöntem olarak kullanılabilir. Ancak, kökün bulunacağı ilgili hiçbir ön koşul gerektirmedikten, bazı durumlarda yakınsamayabilir. Böyle durumlarda iraksayacağından her zaman çözüm vermeyebilir.

Örnek 1; $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunu $[1, 2]$ aralığında sıfır yapan köklerinden birini, *a-Kirişler yöntemine*, *b-Değiştirilmiş kirişler yöntemine*, *c-Ardışık kirişler yöntemine* göre en fazla $\varepsilon = 0.001$ mutlak hata ile hesaplayınız.

Çözüm 1: Bu fonksiyonun sınır değerleri için değeri hesaplandığında; $f(1) = -1$ ve $f(2) = 5$ elde edilmektedir. Sonuçta, bu aralıkta en az bir kökü bulunmaktadır. Bu kök değeri;

a) *Değiştirilmemiş “Kirişler yöntemine” göre hesaplandığında;*

x_a	x_b	$y_a = f(x_a)$	$y_b = f(x_b)$	$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$	$f(x)$
1	2	-1	5	1.17	-0.568
1.17	2	-0.568	5	1.255	-0.278
1.255	2	-0.278	5	1.294	-0.126
1.294	2	-0.126	5	1.311	-0.056
1.311	2	-0.056	5	1.319	-0.026
1.319	2	-0.026	5	1.323	-0.0098
1.323	2	-0.0098	5	1.324	-0.001

Tablo 12a: İteratif Çözüm

b) Fonksiyon değerini ikiye bölerek “Değiştirilmiş kırışlar yöntemine” göre hesaplandığında da,

x_a	x_b	$y_a = f(x_a)$	$y_b = \frac{f(x_b)}{2}$	$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$	$f(x)$
1	2	-1	2.5	1.2857	-0.1603
1.2857	2	-0.1603	1.25	1.3668	-0.1870
1.2857	1.3668	-0.1603	0.18703	1.323	-0.007
1.323	1.3668	-0.007	0.18703	1.324	-0.001

Tablo 12b: İteratif Çözüm

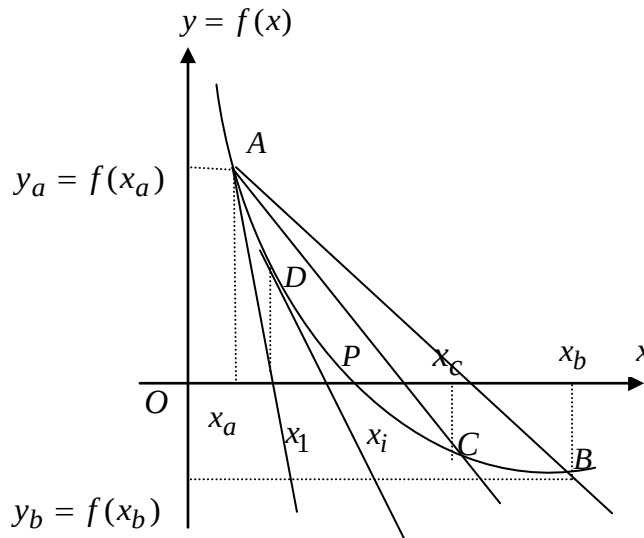
c) Ardışık kırışlar yöntemine göre hesaplandığında,

x_i	$f(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$
1	-1	
2	5	1.17
1.17	-0.568	1.394
1.394	0.315	1.314
1.314	-0.045	1.324

Tablo 12c: İteratif Çözüm

$\varepsilon = 0.001$ mutlak hata ile kırışlar yöntemi için 7. iterasyon adımı, değiştirilmiş kırışlar yöntemi için 4. iterasyon adımı sonucunda ve ardışık kırışlar yöntemi için de 4. iterasyon adımı sonucunda yakınsayarak; **$x=1.324$** olarak hesaplanır.

5.1.1.8 TEĞET-KIRIŞ YÖNTEMİ



Grafik 12: Teğet-Kiriş yöntemi

Bu yöntemde $f(x) = 0$ gibi bir denklemin $[x_a, x_b]$ aralığındaki bir kökü, aralığın sınır noktalarından başlayarak kiriş ve teğet yaklaşımlarını iteratif olarak birlikte kullanarak, daha kısa sürede hesaplanmaktadır.

Bu amaçla; aranan kök değerine $f(x)$ fonksiyonunun çizdiği eğrinin iç bükey (*konveks*) tarafından kirişlerle, dış bükey (konkav) olduğu tarafından da teğetlerle yaklaşarak ardı sıra yapılan iterasyon işlemleri sonucunda daha kısa sürede veya daha hızlı bir şekilde sağlanmaktadır. Bu tür iterasyon işlemleri yapılırken; kirişlerle yaklaşımda, kirişler yöntemine göre kök hesaplama yönteminden, teğetlerle yaklaşımda ise; *Newton-Raphson* yönteminden faydalanılır. Bu nedenle, çoğu zaman, *Teğet- kiriş* yöntemi ayrı olarak ele alınmayıp, sanki bu iki çözüm yönteminin birlikte bir uygulaması olduğu da düşünülmektedir. Neticede; farklı iki yöntem kullanılarak, her iki yönden aynı anda köke yaklaşıldığından yakınsama da daha çabuk olmaktadır.

Uygulamada; bu şekildeki bir çözüme hangi noktadan başlayarak yaklaşılacağına; $f(x)$ fonksiyonun tanımladığı eğrinin şekline veya bir diğer ifade ile fonksiyonun ve ikinci türevinin işaretine bakılarak karar verilir. Bu durum da $f(x)$ fonksiyonun tanımladığı eğrinin konkav ve konveksliğini temsil eden değerler,

$$f(x_a) f''(x) > 0 \text{ ise;}$$

A noktasından,

$$f(x_b) f''(x) > 0 \text{ ise;}$$

B noktasından başlanarak iteratif olarak yaklaşılmalıdır.

Kesin kök değerine A noktasından Teğet-kiriş yöntemiyle yaklaşırken AB kirişinin x eksenini kestiği noktanın koordinatları, bu noktalardan geçen kiriş denkleminde $y = 0$ alınarak elde edilen,

$$x = x_b - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} (y_b)$$

bağıntısından ve dış bükey tarafından teğetle yaklaşırken eğri üzerindeki her yeni noktada; *Newton-Raphson* iterasyon bağıntısının temsil ettiği teğetin denklemi olan,

$$x' = x_a - \frac{f(x_a)}{f'(x_a)}$$

bağıntılarından faydalanılır. B noktasından yaklaşımda; benzer şekilde, kiriş için

$$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} (y_a)$$

ve teğet için de

$$x' = x_b - \frac{f(x_b)}{f'(x_b)}$$

bağıntıları kullanılır.

Bu durumlar dikkate alınarak kesin çözüme ulaşmak için yapılacak iterasyon hesaplamalarında; ilk iterasyon adımı için; x_a ve x_b başlangıç (*yaklaşık kök*) değerleri kullanılarak yapılan benzer hesaplamalardan kiriş için $x_c = x$ ve teğet için de $x_1 = x'$ değerleri hesaplanarak her biri elde edilir. İkinci adım bu değerler yaklaşık kök değerleri kabul edilerek aynı işlemler benzer şekilde yapılarak ikinci iterasyon için yeni kök değerleri hesaplanır. Böylece; benzer işlemler ardı sıra tekrarlanarak, iterasyon adımlarına devam edilerek, i .iterasyon adımı $|x_a - x_b| \leq \varepsilon$ olduğu zaman çözüme yaklaşılmış olduğundan aranan kesin kök değeri bulunmuş olur.

Örnek : $f(x) = x^6 - 70$ fonksiyonunu $[1,4]$ aralığında sıfır yapan bir kökünü $\varepsilon \leq 0,05$ mutlak hata ile *Teğet-kiriş* yöntemine göre hesaplayınız.

Çözüm: Bu aralıkta $f(x) = x^6 - 70 = 0$ denkleminin *Teğet-kiriş* yöntemine göre yapılacak çözüm için; birinci türevi $f'(x) = 6x^5$ ve ikinci türevi de $f''(x) = 30x^4$ olmaktadır. Ayrıca; arana çözüme kirişlerle yaklaşımdaki başlangıç değerleri $x_a = 1$; $x_b = 4$ ve teğetlerle yaklaşım için de, “*Newton-Raphson* iterasyon bağıntısındaki”, $x_o = 4$ olmaktadır. Bu problemde; $f(x)f''(x) > 0$ olduğu için aranan çözüme teğetle yaklaşım için apsisi $x_b = 4$ olan başlangıç noktası seçilerek;

$$h = -\frac{f(x_o)}{f''(x_o)}$$

olmak üzere $x = x_o + h$ ya da kısaca,

$$x = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

bağıntısından faydalanılarak yaklaşılmaktadır. Kirişle yaklaşım için de apsisi $x_a = 1$ olan n okta başlangıç noktası seçilerek,

$$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$$

bağıntılarından faydalanılarak yaklaşılmaktadır.

Burada; $y_a = f(x_a)$ ve $y_b = f(x_b)$ göstermektedir. Birinci adımda kiriş çözümü için yaklaşık kök değerleri (başlangıç değeri) $x_a = 1$; $x_b = 4$ alınarak $x_1 = 1,05$ gibi yeni bir kök değeri hesaplanırken, teğetle yaklaşım için yapılan *Newton-Raphson* çözümünden $x_2 = 3,34$ gibi bir değer bulunmaktadır. Böylece kökün bulunduğu aralık her iki taraftan daraltılarak, (x_1, x_2) yada $(1.05, 3.34)$ gibi ikinci

iterasyon adımı için yeni başlangıç değerleri elde edilmiş olmaktadır. Daha sonraki iterasyon adımları için aynı işlemler tekrarlanarak,

x_a	x_b	y_a	y_b	$x = x_a - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}(y_a)$	$f(x)$	x	$x_{i+1} = x_i + h_i$
1	4	-69	4026	1.05	-68.66	4	3.34
1.05	3.34	-68.66	1318.29	1.16	-67.56	3.34	2.81
1.16	2.81	-67.56	422.31	1.39	-62.79	2.81	2.41
1.39	2.41	-62.79	125.93	1.73	-43.19	2.15	2.05
1.73	2.15	-43.19	28.77	1.98	-9.75	2.05	2.03
1.98	2.05	-9.75	4.22	2.03			

Tablo 13: İteratif Çözüm

Sonuçta mutlak hatasının $x_{i+1} - x_i \leq 0.05$ olan $x = 2.03$ kök değerine 6. iterasyon adımıyla ulaşılmaktadır. Böylece ; *Newton-Raphson* yöntemi kullanılarak yakınsaması yavaş olan kirişler yöntemine kök hesaplamasının yakınsama hızı artırılarak, kesin köke daha kısa zamanda ulaşılması sağlanmaktadır.

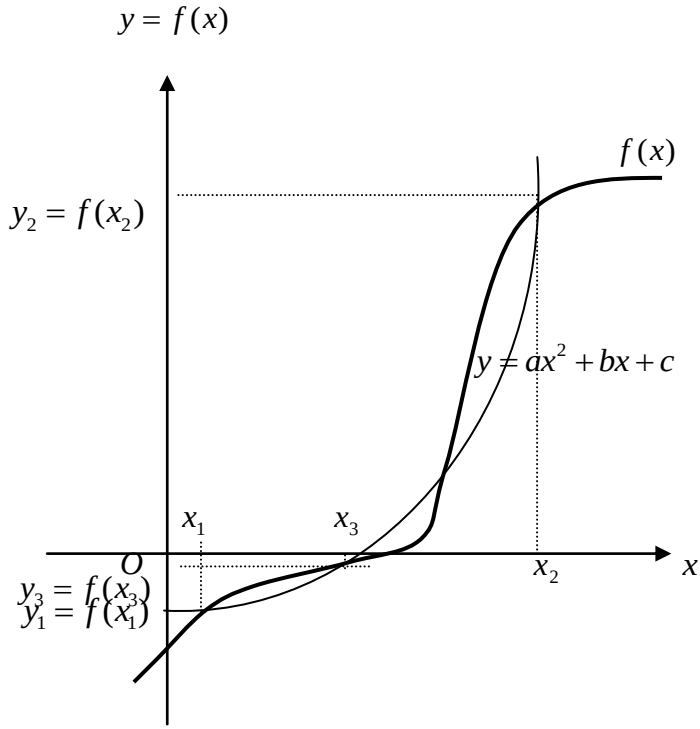
5.1.1.9 MÜLLER YÖNTEMİ

Müller yöntemine göre; $f(x)$ gibi bir fonksiyonun $f(x) = 0$ yapan ; $[x_1, x_2]$ aralığında veya

$$f(x_1)f(x_2) < 0$$

koşulunu sağlayan sınır değerleri arasındaki herhangi bir kökün hesaplamada, daha önce anlatılan yöntemlerdekine benzer bir şekilde; herhangi bir doğruyu kullanarak gerçek kök değerine yaklaşma yerine, bu fonksiyonun üç farklı noktasından geçen herhangi bir ikinci derece parabolünden faydalanılır. Bilindiği gibi, böyle bir polinomun kuadratik özellikte bir ikinci dereceden polinom olması nedeniyle her zaman çakışık yada farklı iki adet kökü bulunmaktadır. Bu kök değerleri reel değerli olabilecekleri gibi sanal ya da kompleks değerli de olabilirler.

Bu nedenle, *Müller yöntemi*; bir $f(x) = 0$ fonksiyonunun reel köklerini hesaplaması yanında sanal köklerinin de hesaplanmasında kullanılan bir diğer yöntem olmaktadır. Ayrıca; bu yöntemle $f(x)$ fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ aralığında herhangi bir kökünün hesaplamasında kendisinin kullanılması yerine, farklı özelliklere sahip bir parabol kullanılarak kök değeri hesaplandığından tek adımda direkt çözüm vermemektedir. Kesin çözüme ancak; her seferinde katsayıları yeniden hesaplanan bir parabol kullanılarak, iteratif bir şekilde, her seferinde aynı işlemler tekrarlanarak ulaşılmaktadır. *Müller* yönteminde böyle bir iterasyon işlemi; genel şekliyle, Grafik.13 'den de görüldüğü gibi, aşağıda verilmiş olan işlem adımları izlenerek yapılır.



Grafik 13: Müller yöntemi

İlk adımda; fonksiyonun gerçek kök değerinin bulunduğu $[x_1, x_2]$ aralığını tanımlayan x_1 ve x_2 sınır değerlerine karşılık gelen, $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ fonksiyon değerleri hesaplanır.

İkinci adımda; “bir parabol en az üç nokta ile belirlenebileceğinden”, üçüncü nokta olarak; apsis değeri,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

şeklinde hesaplanarak, buna karşılık gelen fonksiyon değeri, $y_3 = f(x_3)$ olan bir nokta daha belirlenir. Böylece; koordinatları bilinen üç nokta elde edilmiş olur.

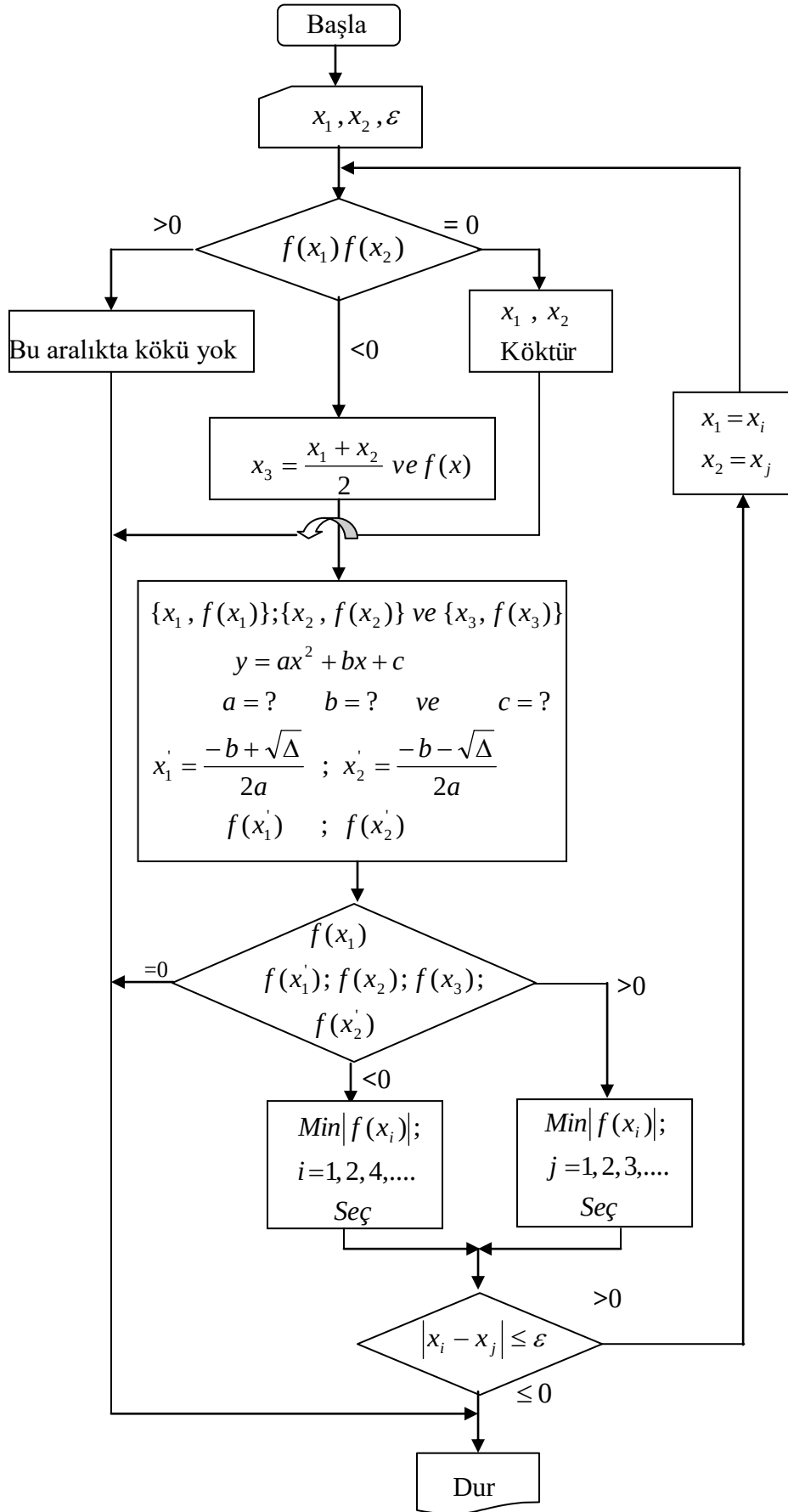
Üçüncü adımda; bu noktalardan geçen $y = ax^2 + bx + c$ yapısındaki bir parabol seçilerek; bu üç farklı noktadaki koordinat değerlerine göre; a, b, c katsayıları,

$$x_1^2 a + x_1 b + c = y_1$$

$$x_2^2 a + x_2 b + c = y_2$$

$$x_3^2 a + x_3 b + c = y_3$$

kurulan üç bilinmeyenli üç adet doğrusal denklemden oluşan bir denklem sisteminin çözümünden belirlenir.



Diyagram 7: Algoritma Çözümü

Dördüncü adımda; katsayıları belirlenmiş $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin çözümü, $\Delta = b^2 - 4ac$ *diskriminant* değerinden faydalanarak,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

şeklinde yapılarak kökleri bulunur. Bu köklerden bilinen noktalara uzak değerde olanı iterasyon işlemlerinde hiç dikkate alınmaz. Gerçek kök değerinin bulunduğu aralıkta olanı veya bilinen noktalara yakın olanı bir dördüncü nokta olarak alınır.

Daha sonraki çözümde, bu dört noktadan fonksiyonun işaretinde değişiklik yapabilecek ve birbirine yakın iki tanesi seçilerek bir önceki adımda olduğu gibi, bunlardan bir üçüncü noktanın değerleri hesaplanarak; elde edilen üç adet yeni noktalardan aynı şekilde, bir ikinci derece parabolü geçirilerek katsayıları hesaplanır. Benzer şekilde tekrar bu parabolün kökleri hesaplanarak bir sonraki adımda kullanılacak yeni noktalara belirlenir.

Bir sonraki adımda hesaplanan kök değerinin bir önceki adımda hesaplanandan kök değerinden olan farkı; sıfır ya da daha önce ön görülen bir sınır değerinden küçük ise iterasyon durdurularak aranan kök değeri elde edilmiş olur. Böyle bir işlem yukarıda verilen bir hesap algoritması ile kısaca özetlenebilir.

Örnek : $f(x) = x^3 - 3.7x^2 + 6.25x - 4.069$ fonksiyonunun $1.0 < x < 1.5$ aralığındaki bir kökünü *Müller* yöntemine göre hesaplayınız.

Çözüm: Bu fonksiyonun $x_1 = 1.0$ ve $x_2 = 1.5$ sınır değerlerine karşılık gelen fonksiyon değerleri;

$$f(1.0) = -0.519 \quad \text{ve} \quad f(1.5) = 0.356$$

olarak hesaplanır.

Burada $f(x_1)f(x_2) < 0$ koşulu gereğince; $f(1.0)f(1.5) < 0$ olduğundan bu aralıkta en az bu fonksiyonu sıfır yapan bir kök değeri bulunduğu karar verilir. Sonra uygulanacak çözüm yönteminin gereği; bu aralıkta bir üçüncü nokta gerekli olduğundan; böyle bir noktanın apsisi için, $1.0 < x < 1.5$ aralığın ortalaması alınarak,

$$x_3 = \frac{1.0 + 1.5}{2} = 1.25$$

ve buna karşılık gelen fonksiyon değeri de; $f(1.25) = -0.084625$ olarak bulunur. Böylece; bu üç farklı noktadan geçen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

karakterindeki bir ikinci dereceden polinomun katsayıları olan a , b ve c değerleri,

$$\begin{aligned} a + b + c &= -0.519 \\ 1.5625a + 1.25b + c &= -0.084625 \\ 2.25a + 1.5b + c &= 0.356 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünden,

$$a=0.05, \quad b=1.625 \quad \text{ve} \quad c=-2.194$$

olarak hesaplanır.

Neticede; her üç noktadan geçen ikinci derece polinomu;

$$f(x) = 0.05x^2 + 1.625x - 2.194$$

olarak elde edilir. Daha sonra; bu ikinci dereceden polinomun kökleri hesaplanır. Bu amaçla; denklemin *diskriminant* değeri,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3.079425 > 0$$

olduğundan, iki adet reel kökü mevcuttur. Bu kökler;

$$x_{1,2}' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

bağıntısına göre; $x_1' = 1.29829... \cong 1.298$ ve $x_2' = -33.79829... \cong -33.798$ olarak hesaplanır.

Burada ; $x_2' = -33.79829... \cong -33.798$ değeri, çözüm aralığına çok uzak bir değer olduğundan, bir sonraki iterasyon adımı için çözüm sadece $x_1' = 1.29829 \approx 1.2983$ değeri alınır. Bu değere karşılık gelen fonksiyon değeri de $f(1.2983) = -0.002889$ olur. Böylece; çözüm için kullanılabilecek bir dördüncü noktanın değerleri; ilk adımdaki (1.0, -0.519), (1.25, -0.084625), (1.5, 0.356) noktalarına ilave olarak (1.298, -0.002889) elde edilmiş olmaktadır.

Bundan sonra ikinci bir adımda, birinci adımdaki işlemlere benzer şekilde, aranan kök; ilk adımda olduğu gibi $f(a)f(b) < 0$ koşulundan faydalanılarak, fonksiyon değerlerinin çarpımı $f(1.2983)f(1.5) < 0$ yapan, birbirine yakın $1.2983 < x < 1.5$ gibi iki apsis değeri arasında aranmalıdır. Arzulanılan koşulları sağlamadığı için diğerleri sınır değerleri arasında aranmamalıdır.

Bu nedenle; ikinci adımda; aranan kök değeri için $1.2983 < x < 1.5$ sınır değerleri arasındaki aralık esas alınarak birinci iterasyonda yapılan işlemlerin aynısı sırası ile tekrarlanır.

İkinci iterasyon adımında $x_1 = 1.2983$ ve $x_2 = 1.5$ alınır. Sonra, bu değerlerden faydalanarak, bu adımda katsayıları yeniden hesaplanacak olan ikinci dereceden bir parabolün geçeceği üçüncü bir noktanın apsis değeri;

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.39915$$

olarak hesaplanır. Bu apsis değerlerine karşılık gelen fonksiyon değerleri de; her birini ayrı ayrı bu fonksiyonda yerine yazarak yapılan hesaplamalardan, $f(x_1) = -0.002889$, $f(x_2) = 0.356$ ve $f(x_3) = 0.1716$ olarak bulunur. Böylece; koordinatları bilinen üç noktadan geçen $y = ax^2 + bx + c$ şeklindeki parabolün denklemi, birinci adımda yapılan işlemlere benzer şekilde,

$$1.6856a + 1.2983b + c = -0.002889$$

$$2.25a + 1.5b + c = 0.356$$

$$1.9576a + 1.3992b + c = 0.1715$$

kurulan üç bilinmeyenli üç adet doğrusal denklemin çözümünden, $a = 0.40324$, $b = 0.6606$ ve $c = -1.5422$ katsayılarına göre;

$$y = 0.40324x^2 + 0.6606x - 1.5422$$

olarak elde edilir. Daha sonra; bu polinomu $0.40324x^2 + 0.6606x - 1.5422 = 0$ yapan kök değerleri, diskriminat değeri $\Delta = b^2 - 4ac = 2.923899$ olduğu dikkate alınarak,

$$x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

bağıntısından, $x'_1 = 1.30114$ ve $x'_2 = -2.939366$ olarak hesaplanır. Bu değerlerden; $x'_2 = -2.939366$ çözüm aralığının dışında bir değer olduğundan, koşulları sağlayan çözüm $x'_1 = 1.30114$ değeri olmaktadır. Bu değer fonksiyonda yerine yazıldığında fonksiyonun değeri $f(x'_1) = 0.0019$ olur. Aranılan kök değerleri için bu duyarlılığın yeterli olması durumunda iterasyon işlemi durdurularak kök değeri olarak $x'_1 = 1.30114$ kullanılır.

Daha duyarlıklı sonuçların elde edilmesi arzulandığında; yeni kök değeri, önceki iterasyon adımlarında olduğu gibi, $f(a)f(b) < 0$ koşulunu sağlayan $f(1.2983)f(1.30114) < 0$ ve her birinin fonksiyon değeri mutlak değerce en küçük olan fonksiyon değerlerine karşılık gelen apsis değerlerinin tanımladığı $[1.2983, 1.30114]$ aralıkta olacağından, bu sınır değerleri dikkate alınarak benzer iterasyon işlemlerine devam edilir. Koşullar sağlandığında iterasyon işlemleri durdurularak en son adımda hesaplanan değer aranılan kök değeri olarak alınır. Yapılan işlemler aşağıdaki tablodaki gibi özetlenebilir. Böylece; belli doğrulukla,

ikinci iterasyon işleminin sonucunda kök değeri $x=1.30114$ olarak hesaplanmış olur.

İterasyon	x_1	x_2	$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$
1	1.0	1.5	1.25
	$f(1.0) = -0.519$	$f(1.5) = 0.356$	$f(1.25) = -0.084625$
	$y = ax^2 + bx + c$ katsayıları hesapla		
	$a + b + c = -0.519$		
	$1.5625a + 1.25b + c = -0.084625$		
	$2.25a + 1.5b + c = 0.356$		
	$a=0.05, \quad b=1.625 \quad \text{ve} \quad c=-2.194$ katsayılar $y = 0.05x^2 + 1.625x - 2.194$ polinom		
2	$\Delta = b^2 - 4ac = 2.923899 > 0$; $x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$		
	$x'_1 = 1.29829 \approx 1.2983$ çözüm kabul		
	$x'_2 = -33.79829... \cong -33.798$ çözüm kabul değil		
	$f(1.2983) f(1.5) < 0$ olduğundan ikinci iterasyon adımı için $[1.2983, 1.5]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.		
	1.2983	1.5	1.39915
	$f(1.2983) = -0.002889$	$f(1.5) = 0.356$	$f(1.39915) = 0.1715$
	$y = ax^2 + bx + c$ katsayıları hesapla		
	$1.6856a + 1.2983b + c = -0.002889$		
	$2.25a + 1.5b + c = 0.356$		
	$1.9576a + 1.3992b + c = 0.1715$		
	$a=0.40324 \quad , \quad b=0.6606 \quad \text{ve} \quad c=-1.5422$ katsayılar $y = 0.40324x^2 + 0.6606x - 1.5422$ polinom		
	$\Delta = b^2 - 4ac = 3.079425 > 0$		
$x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$			
$x'_1 = 1.30114$ çözüm kabul			
$x'_2 = -2.939366$ çözüm değil			
$f(1.2983) f(1.30114) < 0$ olduğundan üçüncü iterasyon adımı için $[1.2983, 1.30114]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.			

Müller yöntemine göre bir $f(x)$ fonksiyonunun bu şekilde; $f(x_1)f(x_2) < 0$ koşulunu sağlayan $[x_1, x_2]$ aralığındaki bir kökün hesaplamada; her iterasyon adımı yardımcı polinom olarak kullanılan $y = ax^2 + bx + c$ ifadesinin katsayıları yeniden hesaplanarak, çözümünden elde edilen değerlere göre fonksiyonun o aralıktaki gerçek kök değerlerine yaklaşılmaktadır. Burada sözü edildiği gibi; herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun her seferinde, $y = ax^2 + bx + c$ yardımcı polinomu belirlenerek çözümü yerine, daha pratik bir yol olan bu polinomun doğrudan kök değerlerini hesaplayarak, fonksiyonun gerçek kök değerlerini iteratif bir şekilde hesaplamanın daha pratik bir çözüm olacağı bir gerçektir. Bu amaçla; en genel şekliyle; $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n adet noktadan geçen,

$$p(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

Newton enterpolasyon polinomundan faydalanılmaktadır. Bu polinom, ikinci dereceden bir ifade için özelleştirildiğinde,

$$p(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$$

Şeklinde bir polinom bağıntısı lede edilir. Müler yönteminde; $f(x)$ fonksiyonunun, $f(x_1)f(x_2) < 0$ koşulunu sağlayan $[x_1, x_2]$ aralığındaki kökünü bulmak için kullanılan üçüncü noktanın apsis değeri,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

olarak hesaplanmaktadır. Buna göre de;

$$|x_3 - x_1| = |x_3 - x_2| \text{ ve } y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \text{ ve } y_3 = f(x_3)$$

olmaktadır.

Sonuçta; $f(x)$ fonksiyonunun üç farklı noktasına ilişkin koordinat değerleri $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ olarak bilinmektedir. Bu noktalardan geçen; ikinci dereceden *Newton enterpolasyon* polinomu da; (x_3, y_3) noktası başlangıç seçilerek,

$$p(x) = a_1 + a_2(x - x_3) + a_3(x - x_3)(x - x_2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

$$x = x_3 \text{ için } a_1 = y_3,$$

$$x = x_2 \text{ için, } a_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = q \text{ ve } p = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

olmak üzere,

$$a_3 = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{q - p}{x_2 - x_1} = r$$

alınarak; *Newton enterpolasyon* polinomu,

$$p(x) = y_3 + q(x - x_3) + r(x - x_3)(x - x_2)$$

olarak ifade edilir. Bu polinom; bazı cebirsel oyunlar neticesinde,

$$0 = y_3 + q(x - x_3) + r(x - x_3)(x - x_2 + x_3 - x_3)$$

$$0 = y_3 + q(x - x_3) + r(x - x_3)^2 + r(x - x_3)(x_3 - x_2)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada; önce $s = q + r(x_3 - x_2)$, sonra elde edilen polinomda; $z = (x - x_3)^{-1}$ dönüşümleri yapılarak,

$$y_3 z^2 + sz + r = 0$$

şeklinde yeni bir ikinci derece polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri, diskriminant değeri $\Delta = s^2 - 4y_3 r$ olmak üzere,

$$z = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4y_3 r}}{2y_3} = -\frac{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3 r}}{2y_3}$$

olarak bulunur. Bu değer;

$$z = (x - x_3)^{-1}$$

bağıntısından

$$x = x_3 + z^{-1}$$

yerine yazılırsa;

$$x_4 = x_3 - \frac{2y_3}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3 r}}$$

yeni noktanın apsis değeri olarak doğrudan hesaplanabilir.

Bu formül kullanılarak her adımdaki yeni noktanın koordinatları doğrudan hesaplandığından, *Müller* yöntemine göre bir fonksiyonun kökünü hesaplamada, bu çözüm şekli, işlem yönünden büyük pratiklikler sağlamaktadır.

Yukarıdan da görüldüğü gibi; *Müller yöntemine* göre klasik çözümü yapılmış olan,

$$f(x) = x^3 - 3.7x^2 + 6.25x - 4.069$$

fonksiyonunun $1.0 < x < 1.5$ aralığındaki kökü; bu yöntemle tekrar hesaplanmak istenirse aşağıdaki işlemler yapılır.

Böylece; ikinci iterasyon sonucunda kök değeri; gerçek kök değerine daha yakın, $x=1.3000$ gibi bir değer olarak bulunmuş olur.

Buradan da görüldüğü gibi; ara işlem sayısı azaltıldığından hesaplanan değerler daha çabuk yakınsamaktadır.

İterasyon	x_1	x_2	$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$
1	1.0	1.5	1.25
	$f(1.0) = -0.519$	$f(1.5) = 0.356$	$f(1.25) = -0.084625$
	$q = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 1.7625 \quad ; \quad p = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 1.7375$ $r = \frac{q - p}{x_2 - x_1} = 0.05 \quad ; \quad s = q + r(x_3 - x_2) = 1.75$ <i>katsayıları hesaplanır</i>		
	$x_4 = x_3 - \frac{2y_3}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3r}} = 1.2983$ $x'_1 = x_4 = 1.2983$ olarak birinci iterasyondan hesaplanır.		
	$f(1.2983) f(1.5) < 0$ olduğundan ikinci iterasyon adımı için $[1.2983, 1.5]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.		
2	1.2983	1.5	1.39915
	$f(1.2983) = -0.002889$	$f(1.5) = 0.356$	$f(1.39915) = 0.1715$
	$q = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 1.82945 \quad ; \quad p = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 1.72919$ $r = \frac{q - p}{x_2 - x_1} = 0.49707 \quad ; \quad s = q + r(x_3 - x_2) = 1.77932$ <i>katsayıları hesaplanır</i>		
	$x_4 = x_3 - \frac{2y_3}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3r}} = 1.3000$ $x'_1 = x_4 = 1.3000$ olarak ikinci iterasyondan hesaplanır.		
	$f(1.2983) f(1.3000) < 0$ olduğundan üçüncü iterasyon adımı için $[1.2983, 1.3000]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.		

Örnek 2: $f(x) = x^6 - 2$ fonksiyonunu $[0.5, 1.5]$ aralığında sıfır yapan bir kökünü, Müller yöntemine göre hesaplayınız.

Çözüm 2: Bu $f(x) = x^6 - 2$ fonksiyonunun $[0.5, 1.5]$ aralığındaki bir kökünü,

a) her iterasyon adımında $y = ax^2 + bx + c$ polinomunun belirlenerek, klasik yolla hesaplanması,

İterasyon	x_1	x_2	$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$
1	0.5	1.5	1.0
	$f(0.5) = -1.9844$	$f(1.5) = 9.3906$	$f(1.0) = -1.0$
	$y = ax^2 + bx + c$ katsayıları hesapla		
	$0.25a + 0.5b + c = -1.9844$ $2.25a + 1.5b + c = 9.3906$ $a + b + c = -1.0$		
	$a=9.8124, \quad b=-12.7498 \quad \text{ve} \quad c=1.9374$ katsayılar $y = 9.8124x^2 - 12.7498x + 1.9374$ polinom		
	$\Delta = b^2 - 4ac = 86.515 > 0$ $x_{1,2}' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1' = 1.123637$ <i>çözüm kabul</i> $x_2' = 0.1757$ <i>çözüm değeğ</i>		
$f(1.123637) f(1.0) < 0$ olduğundan ikinci iterasyon adımı için $[1.123637, 1.0]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.			
2	1.0	1.123637	1.0618
	$f(1.0) = -1.0$	$f(1.123637) = 0.01259$	$f(1.0618) = -0.5668$
	$y = ax^2 + bx + c$ katsayıları hesapla		
	$a + b + c = -1$ $1.263a + 1.124b + c = 0.0126$ $1.127a + 1.062b + c = -0.5668$		
	$a=15.869 \quad , \quad b=-25.491 \quad \text{ve} \quad c=8.622$ katsayılar $y = 15.869x^2 - 25.491x + 8.622$ polinom		
	$\Delta = b^2 - 4ac = 102.501 > 0$ $x_{1,2}' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1' = 1.12216$ <i>çözüm kabul</i> $x_2' = 0.484...$ <i>çözüm değeğ</i>		
$f(1.12216) f(1.123637) < 0$ olduğundan üçüncü iterasyon adımı için $[1.12216, 1.123637]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.			
Aynı işlemler, üçüncü adımda da tekrarlandığında $x=1.1225$ olarak elde edilir.			

tabloda verildiği gibi işlemler yapılarak çözülür.

b) Aynı problemin, *Newton* polinomu kullanarak köklerin doğrudan hesaplanması

İterasyon	x_1	x_2	$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$
1	0.5	1.5	1.0
	$f(0.5) = -1.984375$	$f(1.5) = 9.390625$	$f(1.0) = -1.0$
	$q = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 20.78125 \quad ; \quad p = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 1.96875$ $r = \frac{q - p}{x_2 - x_1} = 18.8125 \quad ; \quad s = q + r(x_3 - x_2) = 11.375$ <i>katsayıları hesaplanır</i>		
	$x_4 = x_3 - \frac{2y_3}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3r}} = 1.077881$ $x_1' = x_4 = 1.077881$ <i>olarak birinci iterasyondan hesaplanır.</i>		
$f(1.077881)f(1.5) < 0$ olduğundan ikinci iterasyon adımı için $[1.077881, 1.5]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.			
2	1.077881	1.5	1.28894
	$f(1.07781) = -0.417169$	$f(1.5) = 9.390625$	$f(1.28894) = 2.58561$
	$q = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = 32.24216 \quad ; \quad p = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 14.296096$ $r = \frac{q - p}{x_2 - x_1} = 42.514229 \quad ; \quad s = q + r(x_3 - x_2) = 23.269128$ <i>katsayıları hesaplanır</i>		
	$x_4 = x_3 - \frac{2y_3}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 4y_3r}} = 1.1339108$ $x_1' = x_4 = 1.13391$ <i>olarak ikinci iterasyondan hesaplanır.</i>		
$f(1.077881)f(1.13391) < 0$ olduğundan üçüncü iterasyon adımı için $[1.077881, 1.13391]$ aralığını tanımlayan sınır değerleri kullanılarak benzer işlemler tekrarlanır.			
Aynı şekilde daha sonraki iterasyon adımlarına devam edilerek 4. adımın sonucunda aranan kök değeri için $x=1.12244$ değeri hesaplanmış olur.			

olarak elde edilir.