

4. MATRİSLER

4.1 Matrislerle İlgili Bazı Tanımlar

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi; n adet bağımsız değişkenler kümesi ile $y_1, y_2, \dots, y_m$ gibi; m adet bağımlı değişken kümesi arasında,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dönüşümünü gerçekleştiren,

$$\underline{A}_{m \times n} = A_{m \times n} = \underline{A} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ elemandan oluşan katsayılar tablosuna matris denmektedir. Geometrik olarak, matrisler böyle gösterilebileceği gibi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

şeklinde de gösterilebilirler.

Matrisler nasıl gösterilirse gösterilsinler; her birinde, m satır sayısını, n de sütun sayısını ifade etmektedir. Ayrıca, tabloyu oluşturan her bir terimine matrisin elemanı denmektedir. Genel bir ifade ile matris elemanları a_{ij} şeklinde gösterilmektedir.

Bu gösterimde;

i : indisi a_{ij} elemanının hangi satırda,

j : indisi de hangi sütunda olduğunu ifade etmektedir.

Alışla gelen bir kural olarak matrisler; $\mathbf{A}_{m \times n}$ veya daha sade olarak $\mathbf{A}$, yada $\underline{A}_{m \times n}$ veya $\underline{A}$ gibi büyük veya büyük ve altı çizili harflerle, boyutu da ifade edilerek yada ifade edilmeden gösterilebilecekleri gibi, bazen de sadece elemanlarına göre de ifade edilmektedirler. Böyle bir ifade tarzı genel olarak;

$$(a_{ij})_{m \times n} \text{ ve } [a_{ij}]_{m \times n} \text{ yada } (a_{ij}) \text{ ve } [a_{ij}]$$

şeklinde yapılmaktadır.

Bunlardan hangi gösterimin diğerine oranla tercih edilmiş olması, çoğu zaman uygulamacıların kendi alışkanlıklarına bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Elemanlarının rakam ya da sadece sayılardan oluşan matrislerde, bazen tablo biçimindeki benzer gösterimlerin sağ alt köşesine matrisin boyutları yazılarak, matrisin satır ve sütun sayısı da belirtilerek,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad \text{ya da} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 3}$$

bir gösterim şekli kullanılmaktadır. Ancak, bu gösterim, genel bir gösterim olmayıp, daha çok sayısal uygulamalarda karşılaşılan bir gösterim tarzı olmaktadır.

Bu şekilde genel olarak tanımlanan matrislerde m -satır ve n -sütun sayısı;

- $m \neq n$ farklı ise; bunlara dikdörtgen matrisler,
- $m < n$, küçük ise, böyle matrislere *yatay(normal) dikdörtgen* matrisler,
- Ters durumda $m > n$ ise; böyle matrislere de *düşey(transnormal) dikdörtgen* matrisler,
- $m = n$ ise; yani sütun sayısı satır sayısına eşit ise, bunlara *kare matrisler* denmektedir.

Transpoze matris (yada Devrik matris); bir A matrisin satır elemanlarını sütun elemanı, sütun elemanlarını satır elemanı yaparak elde edilen yeni A^T matrisine denir. Bu işleme de matrislerde *transpoze* alma işlemi denir.

Buna göre $m < n$ olması halinde;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir yatay dikdörtgen matrisin *transpozesi*; matrisin satırlarını sütun, sütunları satır yapılarak elde edilmiş olan,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir düşey dikdörtgen matris ve aynı şekilde; düşey dikdörtgen matrisin *transpozesi* de yatay dikdörtgen matris olmaktadır. Sonuçta buradan; bir matrisin transpozisinin transpozesi,

$$A = (A^T)^T$$

kendisine eşit bir matris olmaktadır.

Eğer bir matris, bir dizi ya da tek boyutlu matris ise, buna vektör matris yada kısaca vektör denir. Bir vektör matris,

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

veya daha sade bir gösterimle

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

şeklinde tek bir satır matris ise, *satır vektör matris* veya *satır vektör*, eğer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tek bir *sütun matris* ise, buna da *sütun vektör matris* veya *sütun vektör* denmektedir.

Bu gösterim şekillerinden hangisinin uygulamada kullanılacağı, çoğu zaman daha çok uygulayıcının tercihinine bağlı olmaktadır. Buna rağmen, genel bir alışkanlık olarak, uygulamada daha çok vektör matrisler; ***b*** gibi küçük harflerle yada altı çizili ***b*** gibi küçük harflerle gösterilirler. Bunlara sayısal birer örnek olarak;

$$a = [2 \quad -5 \quad 3 \quad 8] \quad \text{ve} \quad a = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

gösterimleri verilebilir.

Eğer bir satır yada sütun vektör matrisin elemanları $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ şeklinde birbirine eşit ve bir ise; böyle matrislere,

$$e = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad \text{ve} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

birim vektör matris, kısaca birim vektör denir. Genel bir alışkanlık olarak, bazı meslek disiplinlerinde, birim vektörler **e** harfi ile gösterilirler.

Neticede; dikdörtgen matrislerdeki özelliğe benzer şekilde; bir satır vektörün *transpozesi*, sütun vektör, yada tersi durumda; sütun vektörün *transpozesi*, satır vektör olmaktadır. Bu duruma bir örnek olarak,

$$a = [4 \quad 2 \quad 0 \quad -1] \quad ; \quad a^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

veya

$$e = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad ; \quad e^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

verilebilir.

Bir matrisin, m -satır ve n -sütun sayısı eşit, $m=n$ ise; böyle matrislere *kare matris* dendiği daha önce söylenmiştir. Böyle bir kare matris de tablo halinde,

$$\underline{A}_{n \times n} = A_{n \times n} = \underline{A} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir kare matrisin; $i=j$ indisli elemanları olan; $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarını üzerinde bulunduğu eksene de bu matrisin **köşegeni** ve elemanlara da **köşegen elemanları** yada **izi** denmektedir.

Bir kare matris; köşegen dışı elemanları sıfır, sadece köşegen elemanlarından oluşuyor ise,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

yada

$$A = k\text{köşegen}[a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}]$$

şeklindeki böyle matrislere **köşegen matris** denir. Bir köşegen matrisin köşegen üzerindeki elemanları, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ ise;

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

böyle matrislere *skaler köşegen matris* denir. Bir skaler köşegen matris de eğer $k=1$ ise; böyle matrislere,

$$I = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

birim matris denmektedir.

Uygulamada birim matrisler genel bir ifade tarzı olarak, **I** yada **E** gibi büyük harfleri ile gösterilmektedirler.

Eğer bir kare matrisin bütün elemanları $a_{ij} = 1$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ bir birine eşit ve bir ise;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

böyle matrislere *skaler matris* denmektedir.

Kare matrislerle ilgili benzer bir diğer tanımda; eğer bir kare matrisin köşegen üstündeki köşegen dışı bütün elemanları sıfır ise, böyle matrislere,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alt üçgen matris, veya tersi durumda; eğer köşegeni altındaki köşegen dışı diğer bütün elemanları sıfır ise, böyle matrislere de

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

üst üçgen matris denmektedir.

Yine kare matrislere ilgili benzer bir tanım; eğer bir kare matrisin tüm köşegen dışı elemanları köşegene göre simetrik, bir diğer ifade ile matris *transpozese* eşit ise, böyle matrislere,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare-simetrik matris denir. Matrisler arasında bir ayırım olsun diye; bazı meslek disiplinlerinde bu tür matrisler *N* harfi ile gösterilmektedir.

$$A = N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & -7 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -5 & 6 & 2 & -2 \\ -7 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Böyle matrislerin;

1. *köşegen üzerindeki elemanları daima pozitif değerlidir. Negatif işaretli olamazlar.*
2. *Buna karşılık; köşegen dışı elemanları eşit ve pozitif, negatif veya sıfır değerli olabilirler.*

Bir kare matris; transpozese ters işaretlisine eşitse,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -7 \\ -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

yani köşegen dışı elemanları mutlak değerce eşit fakat ters işaretli, köşegen elemanları sıfır ise; böyle matrislere *yarı-simetrik matrisler* denmektedir.

Benzer şekilde, bir diğer matris şekli de *Bant matrislerdir*. Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi *Bant matrislerin*;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

köşegene göre simetrik, ancak sağ üst ve sol alt tarafındaki köşegene uzakta bulunan bütün elemanları sıfır, köşegen ve köşegene komşu elemanları bir sayı olmaktadır. Yani bu elemanlar köşegene göre bir bant oluşturmaktadırlar. Böyle matrislere bant matrisler denmektedir.

Ortogonal matrisler; eğer bir matrisin tersi yada inversi $A^{-1} = A^T$ transpozisine eşit yada bir diğer ifade ile transpozesi ile sağdan veya soldan çarpımı,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = AA^T = A^T A = I$$

şeklinde, birim matrise eşit ise; böyle matrislere *ortogonal matrisler* denir.

Genelde böyle matrislere; ortogonal çatılı koordinat sistemlerinin arasında benzerlik dönüşümü yapılırken, rastlanılmaktadır.

Bu matrisin özelliği gereği,

- *satır yada sütunlarının çapraz çarpımlarının toplamı sıfır,*
- *her satır yada sütundaki elemanlarının karelerinin toplamı da bire,*
- *Aynı şekilde; determinantları da bire eşit*

olmaktadır.

Hermisyen matrisler; Bir Hermisyen matrisin tanımlanabilmesi için önce eşlenik matrisin ne olduğunun bilinmesi gerekir.

Bu nedenle; bir matrisin eşleniği; a, b gerçel ve $i = \sqrt{-1}$ sanal sayılar olmak üzere; $z = a \pm bi$ şeklindeki ifade, bir karmaşık yada kompleks sayıyı ifade etmektedir. Bu şekilde tanımlanan karmaşık sayılardan; $z = a + bi$ ve $\bar{z} = a - bi$ özelliğine sahip, yani gerçel kısımları eşit sanal kısımları mutlak değerce eşit ancak işaretce ters olan, karmaşık sayılarına birbirinin eşlenik sayıları denir. Aynı

zamanda, bunların her biri diğerinin eşleniği olmaktadır. Neticede; $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ iki karmaşık sayının toplamı olan;

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$z_1 + z_2$ toplamı da; karmaşık bir sayı olur. Benzer şekilde; bu karmaşık sayının eşlenik değeri de;

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

olarak verilebilir. Bu tanım matrislere uygulanırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & -i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$$

gibi elemanları karmaşık sayılardan oluşan bir kare matris de, her bir karmaşık sayı yerine eşlenikleri kullanılarak elde edilen matrislere,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$$

Eşlenik matris denmektedir.

Bu tanıma uygun olarak; eğer bir matrisin eşleniği $\overline{A}^T = A$ özelliğine sahip ise, yani eşleniğinin transpozesi kendisine eşit ise, böyle matrislere *Hermisye matris* denmektedir.

Bu durum ancak; köşegenine göre kare-simetrik yapıdaki matrislerde rastlanılmak mümkün olabilir. Neticede; her hermisye matrisin elemanı için, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ özelliği mevcut olur. özellikleri gereği, bir hermisye matrisin köşegen elemanları,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

gerçek sayılar olmaktadır.

Alt matrisler: Bir diğer matris çeşidi de, *Alt matrisler*dir. Bir matrisin sütun ve satır yönünde,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanmasından elde edilen daha küçük boyutlu,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} ; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} , A_3 = [1 \ 6] ; A_4 = [2 \ 1]$$

her bir matrise alt matris denmektedir. Bu işleme de matrislerde gruplara ayırma işlemi denmektedir. Bu durum bazı özel problemlerin çözümünde büyük faydalar sağlamaktadır.

Idempotent matrisler; İzi rangına eşit olan matrislere *Idempotent matris* denmektedir. Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki elemanlarının $\text{İz}(a) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ toplamı o matrisin **izi** olarak tanımlanmaktadır.

Matris Normları; Ayrıca matrisler ilgili bir diğer tanım da matris normlarıdır. Bunlar tanımlanış şekillerine göre farklılıklar gösterirler. Bunlar;

- *bir matrisin tüm elemanlarını toplamına matris normu,*
- *satır elemanlarının toplamına satır normu,*
- *sütun elemanlarının toplamına sütun normu,*
- *tüm elemanlarının karelerinin toplamına da karesel normu*

şeklinde tanımlanarak isimlendirilirler.

Pozitif tanımlı matrisler; x bir vektör, A bir kare matris olmak üzere; $x^T A x$ karesel formunda; $\det|A| > 0$ ise; ***A pozitif tanımlıdır*** denir. Aksı halde; $\det|A| = 0$ ise; ***A semi-pozitif tanımlıdır*** denmektedir.

Determinant; Matrislerle ilgili kullanılan bir diğer büyüklük de **Determinant** değeridir. Bu amaçla;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir kare matrisin determinantını hesaplayabilmek için, önce bu matrisin her satırında bir ve yalnız bir elemanı ve her sütununda bir ve yalnız bir eleman alınarak

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

çarpımı yazılır. Bu çarpımda; çarpanların ilk alt indisler dizisi $1, 2, 3, \dots, n$ doğal sırasında ve ikinci $j_1, j_2, \dots, j_n$ alt indisler de $1, 2, 3, \dots, n$ tamsayılarının $n!$ Permütasyonundan biri olacak şekilde düzenlenmiştir. İkinci alt indislerin verilen bir $j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonu; permütasyonun çift veya tek oluşuna göre $\varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} = +1$ veya -1 olarak tanımlanır ve işaretiyle birlikte çarpımı,

$$\varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

şeklinde ifade edilir.

Buna göre; A kare matrisinin determinanı $|A|$ veya $\det A$ şeklinde gösterilerek,

$$\det A = \sum_{\rho} \varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

olarak tanımlanabilir.

Burada; $j_1, j_2, \dots, j_n$ deki $1, 2, 3, \dots, n$ tamsayılarının $\rho = n!$ permütasyonu üzerinden alınmaktadır.

Neticede; bu şekilde bir yol izlenerek;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gibi bir kare matrisin determinantını hesaplamak için önce determinant hesaplama işleminin; hangi satır yada sütuna göre yapılacağına karar verilir. Sonra bu satır veya sütunda bulunan her bir elemana karşılık gelen satır ve sütun matristen çıkartılarak, bu eleman, $(-1)^{i+j}$ bağıntısından hesaplanan değer ve arda kalan elemanlardan oluşan matrisin determinanı çarpılarak, bu işlemler determinant açılımı yapılan satır yada sütunun tüm elemanları için tekrarlanıp elde edilen sonuçların toplanması neticesinde determinant hesaplanmış olur. Bu duruma bir örnek olarak; n-boyutlu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

bir kare matrisin birinci satırına göre determinant açılımı olan,

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + (-1)^{i+j} a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{i+j} a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \dots + (-1)^{i+j} a_{1n} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{31} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

determinant hesaplama şekli verilebilir. Aynı şekilde, işlemler yapılarak, bir kare matrisin, diğer satır yada sütunlara göre de determinant hesaplamak mümkündür.

Örnek 1: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin $\det A = ?$, hesaplayınız.

Çözüm 1: Determinant birinci satıra göre hesaplanarak,

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det[a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \det[a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

değeri elde edilir.

Bu çözüm incelendiğinde 2x2 boyutlu bir kare matrisin determinantının; köşegen üzerindeki elemanlarının yukardan aşağıya doğru çarpımlarının artı, aşağıdan yukarı çarpımlarının eksi işaretli alınarak,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \end{array}$$

toplanmaları olduğu görülmektedir. Benzer şekilde; aynı çözüm, diğer satır ve sütunlara göre de yapılarak determinant hesaplanabilir. Sonuçlar aynı olur. Sayısal bir örnek olarak 2x2 boyutundaki;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

kare-matrisinin determinantı hesaplanırsa;

$$\det A = (-1)^{1+1} 1 \det[4] + (-1)^{1+2} 2 \det[3] = (1)(4) - (3)(2) = -2$$

olarak elde edilir.

Örnek 2: Bir diğer örnek 3x3 boyutundaki bir kare,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin $\det A = ?$ hesaplanması ile ilgilidir.

Çözüm 2: Birinci satıra göre determinant hesaplamasına ilişkin benzer işlemler bu matris için de yapılır;

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{aligned}$$

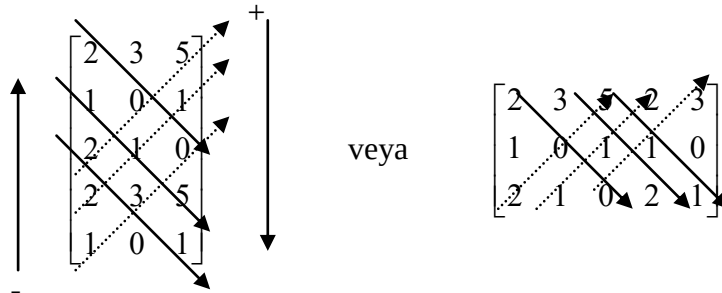
olarak hesaplanır. Bu durumla ilgili sayısal bir örnek;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kare-matrisinin $\det A = ?$ hesaplanması verilebilir. Bunun için yukarıda anlatılanlara benzer şekilde; birinci satır esas alınarak determinant açılımı yapılarak determinant,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2(0 - 1) - 3(0 - 2) + 5(1 - 0) = -2 + 6 + 5 = 9 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Aynı çözüm; sadece 3x3 boyutundaki kare matrisler için uygulanabilen **Sorus** kuralına göre; matrisin ilk iki satır yada sütunu; matrisin sonuna tekrar yeni iki satır olarak eklenerek,



yukarıdan aşağıya, soldan sağa doğru üçlü çarpıların toplamı artı, aşağıdan yukarı üçlü çarpımlarının toplamı negatif alınarak toplamları şeklinde,

$$\det A = 0+5++6+0-2-0 = 9$$

olarak hesaplanır.

Daha büyük boyutta olan matrislerin determinanı, bazı özel durumdaki matrisler için, özel determinant hesaplama yolları olsa bile, yukarıdaki genel kurallara göre hesaplanır. Sonuçta determinant ilgili aşağıdaki özellikler söylenebilir

- a) *i. Satırındaki yada j. sütunundaki bütün elemanları sıfır olan matrisin determinanı da sıfır olmaktadır.*
- b) *Bir matrisin bir satır yada sütunu k gibi skalerle çarpılarak elde edilen matrisin determinanı, ilk matrisin determinantının k gibi bir sayı ile çarpılmış değerine eşittir. $B=kA$ ise; $\det B = k \det A$ olur.*
- c) *Bir matriste; iki satır yada sütuna yer değiştirilir ise, determinant da işaret değiştirmiş olur. Yani; B matrisi A matrisinin iki satır yada sütununun yer değiştirmesi neticesinde elde edilmiş bir matris ise, $\det B = - \det A$ olur. Buna göre; B matrisi eğer A matrisinde i. satırın yada sütunun arka arkaya p kez yer değiştirmeleri sonucunda elde edilmiş bir matris ise, $\det B = (-1)^p \det A$ olur.*
- d) *Bir matrisin iki satır yada sütunu bir birine eşit yada sabit bir sayı ile çarpılmış değerine eşit ise, determinanı sıfırdır.*
- e) *Determinantı sıfır olan matrislere singüler(tekil) matris denir. Bu matrislerin, bilinen yollarla inversleri hesaplanamaz.*

Kofaktörler Matrisi; Bir matrisin kofaktörlerinden oluşan matrislere denmektedir. Böyle bir matris; bir kare-matriste herhangi bir elemana karşılık gelen satır yada sütunlar matristen çıkartıldıktan sonra geriye kalan elemanlarından oluşan matrisin determinanı hesaplanarak her elemanın minörleri bulunur. Sonra her bir elemana karşılık gelen minör değerleri, bu elemanların bulunduğu satır yada sütunu gösteren i ve j indislerine göre $(-1)^{i+j}$ şeklinde hesaplanan değerle çarpılarak o elemanlara karşılık gelen kofaktör değerleri bulunur. Buna göre; bir

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin kofaktörler matrisiyle ilgili hesaplamalar, benzer şekilde,

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \det[4] = 4$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \det[1] = -1$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \det[6] = -6$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \det[5] = 5$$

hesaplanarak kofaktörler matrisi,

$$\text{Kofaktör } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmış olur.

Adjoin(ek) matris: kofaktörler matrisinin transpozesi $\text{Adj } A = (\text{kofaktör } A)^T$ olarak tanımlanır. Bu tanıma göre de;

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin adjoint(ek matrisi) matrisi olarak,

$$\text{Adj } A = (\text{kofaktör } A)^T = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

hesaplanır.

Ters yada diğer adıyla **İnvers(Evrik) matris;** Bir **A** kare matrisinin $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ özelliğini sağlayan A^{-1} matrisine ters yada invers matris denir. Böyle bir matris, genel şekli ile,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}$$

şeklinde hesaplanır.

Buna göre; yukarıda verilmiş olan,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ kare matrisinin } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \text{ tersi ,}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} = \frac{1}{20-6} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{14} & -\frac{6}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

işlemleri yapıldıktan sonra,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Burada yapılmış olan işlemlerin doğruluğunun denetimi için bir kare matrisin inversi ile sağdan veya soldan çarpımı $AA^{-1} = A^{-1}A = I = E$ birim matris olacaktır özelliğinden faydalananarak aşağıdaki işlemler yapılır. Böyle bir çarpma işlemi neticesinde,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sonuç birim matris olduğu sayısal olarak da kanıtlandıktan sonra, invers almak için yapılan işlemler, dolayısı ile matrisin inversi doğru hesaplanmıştır denebilir.

Bir matrisin rangı; Bir kare matrisin minörlerinden, determinantı sıfırdan farklı değere sahip olan en büyük boyutlusunun mertebesi, matrisin rangı olmaktadır. Bu durumda, bir A matris için rang değeri r ise; $\text{rang}(A)=r$ olarak gösterilir. Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisinin rangı; $\det A=0$ olduğundan; minörlerinden $a_{11}=1$ elemanına karşılık gelen bir alt dereceden minörünün

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16 - 20 = -4 \neq 0$$

olduğundan, $\text{rang}(A)=r=2$ olmaktadır.

Buradan; bir A kare matris için; r rangı matrisin boyutu olan n değerine eşit, $r=n$ ise; matrisin determinantı, $\det A \neq 0$, sıfırdan farklı bir değer olur.

4.2 Matrislerle İlgili Bazı İşlemler

a) A ve B gibi iki matrisin boyutları eşit ise; ancak bu matrisler,

$$C = A \pm B$$

toplanıp çıkartılabilir. Burada; her iki matrisin karşılıklı elemanlarının toplamı veya farkı şeklinde bütün elemanları hesaplanmış olan C matrisi de A veya B matrisleri ile aynı boyutta olur.

b) İki matrisin birbiriyle çarpılabilmesi için,

$$A_{m \times k} B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

çarpıma işleminin solunda yer alan matrisin sütun sayısı, sağda bulunan matrisin satır sayısına denk olmalıdır. Sonuçta, elde edilen matrisin satır sayısı; birinci matrisin satır sayısına, sütun sayısı da ikinci matrisin sütun sayısına denk olur. Buna göre de matrisler; $AB \neq BA$, çarpım özelliğine sahip oldukları söylenebilir. Benzer şekilde; eşit boyuttaki iki;

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \text{ satır; } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ sütun vektörün,}$$

sağdan ve soldan çarpımları farklı olmaktadır. Buradan;

$$ab = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{bmatrix} \text{ bir sayı,}$$

$$ba = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \dots & b_n a_n \end{bmatrix} \text{ bir matris}$$

olmaktadır.

c) A ve B gibi iki matrisin bölümü,

$$\frac{A}{B} = C \text{ ise; buradan } A = BC \text{ ve } B^{-1} \text{ invers matrisi; } B \text{ matrisinin tersi ise,}$$
$$B^{-1}A = B^{-1}BC \text{ ve } B^{-1}B = I \text{ birim matris olduğundan } B^{-1}A = C \text{ olur.}$$

d) Matrislerin çarpımının transpozesi,

$$(A B C D)^T = D^T C^T B^T A^T$$

her birinin transpozünün tersi sırada çarpımlarına eşit olmaktadır. Benzer şekilde; kare matrislerin çarpımlarının inversi de,

$$(A B C D)^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$

her birinin inverslerinin tersi sırada çarpımına denk olmaktadır.

e) Bir matrisin, t gibi bir değişkene göre türevi, tüm elemanlarının bu değişkene göre,

$$\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{da_{n1}}{dt} & \frac{da_{n2}}{dt} & \dots & \frac{da_{nn}}{dt} \end{bmatrix}$$

türevine eşit olmaktadır. Netice itibariyle ; matris işlemleri ile ilgili türevler de,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A \pm B) &= \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt} \\ \frac{d}{dt}(AB) &= \frac{dA}{dt} B + \frac{dB}{dt} A \\ \frac{d}{dt}(A^{-1}) &= -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1} \\ \frac{d}{dt}(A^2) &= \frac{dA}{dt} A + A \frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

şeklinde özetlenebilir. Aynı şekilde; bir matrisin integrali; tüm elemanlarının integrali alınarak,

$$\int A dt = \begin{bmatrix} \int a_{11} dt & \int a_{12} dt & \dots & \int a_{1n} dt \\ \int a_{21} dt & \int a_{22} dt & \dots & \int a_{2n} dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int a_{n1} dt & \int a_{n2} dt & \dots & \int a_{nn} dt \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanabilir.

f) Bilineer ve karesel formların türevi; Bir a_{ij} elemanı x ve y gibi iki değişkenin fonksiyonu iseler, bunlardan yalnız birine göre alınan türeve kısmi türev denir. Buna göre;

$$B = Y^T A X = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen bir bilineer form olmak üzere; bunun x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y_1} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] A X \\ \frac{\partial B}{\partial y_2} &= [0 \ 1 \ \dots \ 0] A X \\ &\vdots \\ \frac{\partial B}{\partial y_n} &= [0 \ 0 \ \dots \ 1] A X \end{aligned}$$

elde edilen ifadelerin bir arada matris şeklinde yazılmasından,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial y_1} \\ \frac{\partial B}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} A X = I A X = A X$$

olur. Benzer şekilde x göre kısmi türevleri de alındığında her bir değişken için,

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = Y^T A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial B}{\partial x_2} = Y^T A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial B}{\partial x_n} = Y^T A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

olacağından, sağdaki ilk matris satır, son matris de sütun matris olduğundan kendisi yerine transpozesi yazılarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] A^T Y \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= [0 \ 1 \ \dots \ 0] A^T Y \\ &\vdots \\ \frac{\partial B}{\partial x_n} &= [0 \ 0 \ \dots \ 1] A^T Y \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilirler. Buradan, hepsi bir arada matris şeklinde yazıldıklarında;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial x_1} \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} A^T Y = I \quad A^T Y = A^T Y$$

elde edilir. Burada, kısaca

$$\frac{\partial B}{\partial x} = A^T Y$$

olur. Buradan artık, benzer şekilde hareketle; $B = X^T A X$ şeklindeki bir karesel formun kısmi türevinin, yukarıdaki işlemler de $Y^T = X^T$ alınarak,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = A^T X + A X = (A^T + A) X$$

olduğu söylenebilir. Bu ifadelerdeki A matrisinin, $A^T = A$, bir kare simetrik matris olması halinde kısmi türevi,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 2 A X$$

olur.

g) Bir matrisin mertebe ve rangını değiştirmeyen transformasyonlara elemanter transformasyonlar denir. Bir matris için yapılabilecek satır yada sütun elemanter transformasyonları yada dönüşümleri;

- 1) *i. satırındaki elemanları ile ve j. satırlarındaki elemanlarının yerlerinin değiştirilmesi, satır dönüşümü, H_{ij} , buna benzer şekilde, i. sütun elemanlarının j. sütun elemanları ile yerlerinin değiştirilmesi, sütun dönüşümü, K_{ij} ,*
- 2) *i. satırındaki tüm elemanlarının k gibi bir değerle çarpılması $H_i(k)$, ve benzer şekilde, j. sütunundaki bütün elemanlarının k gibi bir değerle çarpılması $K_j(k)$,*
- 3) *i. satırındaki elemanlarının k gibi bir değerle çarpılarak j. satırındaki elemanlarına eklenmesi $H_{ij}(k)$, ve benzer şekilde, j. sütunundaki elemanlarının k gibi bir değerle çarpılarak i. sütunundaki elemanlarına eklenmesi $K_{ij}(k)$*

şeklinde sıralanarak bunların her biri için verilen gösterimler kullanılabilir.

Özetle, buradan görüldüğü gibi bir matris için; H elemanter dönüşümleri satır, K elemanter dönüşümleri de sütun dönüşümlerini ifade etmektedir. Sonuçta buradan, bir elemanter dönüşümün tersi, zıt etki yapan dönüşüm olduğu söylenebilir. Buna bir örnek olarak,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisinde; $H_{21}(-2)$ şeklindeki bir satır dönüşümü uygulanırsa, ters dönüşüm matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

elde edilmektedir. Buradan elde edilmiş olan B matrisini tekrar ters dönüşümle A matrisi haline dönüştürmek için de $H_{21}(+2)$ satır dönüşümü uygulanarak aynı işlemler yapılır. Sonuç olarak, $H_{21}(-2)$ ile $H_{21}(+2)$ birbirinin tersi işlemler oldukları söylenebilir.

Bu açıklamalardan sonra artık, *Matris eşdeğerliliği*; bir A matrisinden, elemanter dönüşümler yardımıyla B gibi bir matrise geçilebiliyorsa bu iki matris eşdeğer matris oldukları şeklinde tanımlanabilir. Matrislerle ilgili olarak verilen bu işlemleri matematik olarak, kısaca, $A \approx B$ şeklinde göstermek mümkündür. Ve buradan; eşdeğer matrislerin boyutları ve ranglarının da eşit oldukları söylenebilir.

Örnek;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisine $H_{31}(+3)$ elemanter dönüşümü yapıldıktan sonra ele edilen dönüştürülmüş matris,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 10 & 0 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Bir A matrisiyle ilgili elemanter dönüşümler sonucunda; dönüştürülmüş B matrisi; A matrisinin soldan bir takım, ardı sıra her bir satır dönüşümlerini ifade

eden $H_1, H_2, \dots, H_s$, matrislerin tersi sırada çarpımları ile ve sağdan diğer bir takım olan sütun dönüşümlerinin $K_1, K_2, \dots, K_t$ dönüşüm işlemlerinin sırasında çarpılmasından,

$$B = H_s \dots H_2 H_1 A K_1 K_2 \dots K_t = SAK$$

olarak elde edilir. Burada; $S = H_s \dots H_2 H_1$ ve $K = K_1 K_2 \dots K_t$ çarpımları, elemanter dönüşümleri gösteren ve singüler yapıda olmayan iki matristir. Yapılan işlemler bir sayısal örnekle açıklanmak istenirse;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

gibi bir matris önce, $H_{41}(-3)$ ile çarpılırsa;

$$H_{41}(-3)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = B_1$$

sonra; $H_{31}(+1)$ ile,

$$H_{31}(+1)B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = B_2$$

ve sağdan $K_{34}(+1)$ ile

$$B_2 K_{34}(+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix} = B_3$$

son olarak da $K_{41}(-1)$ ile sağdan çarpılırsa,

$$B_3 K_{41}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix} = B_4$$

elde edilir.

Buradan, yapılan elemanter dönüşüm $H_{31}(+1) H_{41}(-3) A K_{34}(+1) K_{41}(-1)$ çarpım işlemine göre;

$$S = H_{31}(+1) H_{41}(-3) \text{ ve } K = K_{34}(+1) K_{41}(-1)$$

olur.

Bu dönüşümde kullanılan elemanter dönüşüm matrisleri, açık bir şekilde matris olarak yazılırsa,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde oldukları görülmektedir.

Burada; $B = SAK$ şeklinde verilmiş olan elemanter matris dönüşümü eşdeğerliliğin ifadesi olmaktadır. Özel durumlar için bu ifade de; $S = S^T$ ve $K = S$ alırsa,

$$B = S^T A S$$

şeklinde bir elemanter dönüşüm bağıntısı elde edilir, ve bu özelliğe sahip, A ve B matrislerine *Kongruent* matrisler denir. Özel bir yaklaşımı olarak da, bu özellikteki matrislerin eşdeğerlilik ifadesi için

$$A \stackrel{c}{\approx} B$$

şeklinde bir gösterim kullanılır.

Burada olduğu gibi; eğer her iki matris arasında yapılan elemanter dönüşümde $S^T = S^{-1}$ özelliği var ise,

$$B = S^{-1} A S$$

olur ve sonuçta; A ve B matrisleri *Similar* matrislerdir denir. Neticede; her iki durum da, matrislerle ilgili eşdeğerliliğin özel bir hali oldukları görülür.

Yukarıda söylenenlere benzer şekilde, bir elemanter matris dönüşümünde, A singüler olmayan bir matris ise;

$$S A K = I$$

bağıntısını sağlayacak, S ve K gibi iki matris bulunabilir. Bu durumda; $S A K = I$ eşitliği soldan S^{-1} ve sağdan K^{-1} ile çarparak,

$$S^{-1} S A K K^{-1} = S^{-1} I K^{-1} = S^{-1} K^{-1}$$

ve sonuçta;

$$S^{-1} S = I ; K K^{-1} = I$$

olacağından,

$$A = S^{-1} K^{-1}$$

olur. Her tarafın tekrar inversi alındığında; bir matrisin bu yolla inversini hesaplamada kullanılabilen,

$$A^{-1} = (S^{-1} K^{-1})^{-1} = K S$$

$$A^{-1} = K S$$

ifadesi elde edilir. Böylece, $A^{-1} = K S$ bağıntısı kullanılarak, bir matrisin inversi elemanter dönüşüm bağıntıları ile de hesaplanabilir. Konuya bir örnek olarak;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisinin A^{-1} inversini, elemanter dönüşüm bağıntıları yardımıyla hesaplanması verilebilir.

Çözüm; A matrisini sırası ile; satır ve sütun elemanter dönüşümlerinden elde edilen, satır dönüşüm matrislerinin tersi sırada, soldan ve sütun matrislerinin dönüşüm sırasında sağdan,

$$H_{21}(-2), H_{31}(-3), H_2(-1), K_{21}(-2), K_{31}(-3), K_{32}(-4), K_{23}(+1), K_{32}(-1)$$

şeklinde çarpımları sonucunda hesaplanan matris;

$$H_2(-1), H_{31}(-3), H_{21}(-2), AK_{21}(-2), K_{31}(-3), K_{32}(-4), K_{23}(+1), K_{32}(-1) = I$$

bir birim matrise eşit olacağından, $A^{-1} = K S$ bağıntısına göre invers hesaplamada kullanılan S ve K matrisleri,

$$S = H_2(-1), H_{31}(-3), H_{21}(-2)$$

$$K = K_{21}(-2), K_{31}(-3), K_{32}(-4), K_{23}(+1), K_{32}(-1)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki her bir çarpan matris yerine; matris ifadeleri yazılırsa S matrisi,

$$\begin{aligned} S &= H_2(-1), H_{31}(-3), H_{21}(-2) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve K matrisi de,

$$K = K_{21}(-2), K_{31}(-3), K_{32}(-4), K_{23}(+1), K_{32}(-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Buradan; A matrisinin inversi, $A^{-1} = KS$ bağıntısına göre,

$$A^{-1} = KS = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

h) Kare matrislerde invers hesaplamının bir diğer yolu olarak; $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ özelliğini sağlayan bir A matrisin indirgenmesi yoluyla A^{-1} invers matrisin hesaplanmasında; bu matrisin arkasına ilave edilen aynı boyuttan bir I birim matrisinin A matrisinin, satır indirgemeleri sonucunda, birim matris oluncaya kadar indirgenmesi verilebilir. Bu şekilde; bir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

kare matrisinin inversinin hesabı için, önce bu matrisin sonuna,

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

aynı boyutta bir birim matris ilave edilerek genişletilir. Sonra; A matrisine ilişkin elemanların oluşturduğu matris, birim matris oluncaya kadar ardı sıra satır indirgemeleri uygulanarak;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -17 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -73 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & 10 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -73 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 43 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

elde edilir. Buradan; A kare matrisinin inversi olarak, bu matrisin sonuna ilave edilmiş olan birim matrisin bulunduğu alanda

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -73 & -2 & 17 \\ 43 & 1 & -10 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hesaplanmış olur.

4.3 Matrislerde Öz Yönler ve Öz Değerler

Bir U vektörü, bir A transformasyon matrisine göre dönüşümü yapılarak;

$$V = AU$$

dönüşüm sonucunda V gibi bir vektör ve V vektörü de;

$$V = \lambda U$$

şeklinde, yani U vektörüne paralel ve U ile orantılı ise; U vektörüne A transformasyonunun *Öz yönü* (değişmez yönü) veya *karakteristik yönü*, λ değerine de *Öz değeri* yada *karakteristik değeri* denir. Bu duruma bir örnek olarak;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisine göre; $V = AU = \lambda U$ bağıntısı, açık bir şekilde yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, gerekli işlemlerin yapılmasından sonra alışıla gelen bir gösterimi olarak,

$$\begin{aligned} 2u_1 + 4u_2 &= \lambda u_1 \\ u_1 + 5u_2 &= \lambda u_2 \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)u_1 - 4u_2 &= 0 \\ -u_1 + (\lambda - 5)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

iki bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilmiş olur. Bunun matris şeklinde ifadesi de;

$$\begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -4 \\ -1 & (\lambda - 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu denklem sisteminin u değerlerinden farklı çözümlerinin hesaplanabilmesi için,

$$\begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -4 \\ -1 & (\lambda - 5) \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisinin determinantının sıfır etmesi gerekir. Buna göre;

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -4 \\ -1 & (\lambda - 5) \end{bmatrix} = 0$$

hesaplanarak,

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

denkleminin kökleri hesaplanır. Bu denklemin her iki kökü için,

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 6$$

hesaplanır. Bu şekilde A matrisinin öz değerleri olarak $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 6$ elde edilmiş olur. Burada; u_1 veya u_2 değerlerinden biri istendiği gibi seçilebilir. $u_1 = 4a$ değeri seçildiğinde $u_2 = -a$ olarak elde edilir. Neticede; U_1 vektörü,

$$U_1 = \begin{bmatrix} 4a \\ -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olur. $\lambda_2 = 6$ için,

$$2u_1 + 4u_2 = 6u_1$$

$$u_1 + 5u_2 = 6u_2$$

sadeleştirilirse;

$$4u_1 - 4u_2 = 0$$

$$-u_1 + u_2 = 0$$

olarak elde edilir. Burada; $u_1 = b$ olarak alınırsa, $u_2 = b$ olacaktır. Sonuçta; U_2 vektörü,

$$U_2 = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanacaktır. Burada; A matrisi; $n \times n$, V ve U vektörleri $n \times 1$ boyutunda alınarak, durum genelleştirilirse,

$$V = AU$$

$$V = \lambda U$$

sol tarafları eşit olduğundan, bu iki denklem eşitlenerek elde edilen,

$$AU = \lambda U$$

dönüşümündeki, A transformasyon matrisi, $n \times n$ ve U vektörü de $n \times 1$ boyutlu,

$$\text{bir } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ şeklinde matris ve } U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ bir vektör olacaktır.}$$

Bu eşitlik matrislerin kendileri kullanılarak, daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &= \lambda u_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n &= \lambda u_1 \\ \vdots & \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n &= \lambda u_n \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı bir homojen denklem sistemi şeklinde ifade edildiğinde,

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})u_1 - a_{12}u_2 - \dots - a_{1n}u_n &= 0 \\ -a_{21}u_1 + (\lambda - a_{22})u_2 - \dots - a_{2n}u_n &= 0 \\ \vdots & \\ -a_{n1}u_1 - a_{n2}u_2 - \dots + (\lambda - a_{nn})u_n &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durum, matris gösterimine göre;

$$(\lambda I - A)U = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir. Benzer şekilde, bu eşitliğin sıfır olması için U vektöründen başka, $\det(\lambda I - A) = 0$ da sıfır etmesi gerekmektedir. Buna göre;

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (\lambda - a_{nn}) \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde determinantına açılırsa; λ değerinin n . dereceden bir karakteristik denklemi,

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

olarak elde edilmiş olur. Bu karakteristik denklemin, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gibi n adet reel veya sanal kökü bulunmaktadır. Bunların hepsine birden A transformasyon matrisinin tayfı denir ve aynı zamanda, her biri de öz değerlerden biri olmaktadır. Sonuçta, öz değerlerin sayısı A matrisinin boyutuna eşit sayıda olmaktadır. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ öz değerleri hesaplandıktan sonra bunlar;

$$\begin{array}{ccccccc}
(\lambda - a_{11})u_1 - & a_{12}u_2 - & \dots & - a_{1n}u_n = 0 \\
- a_{21}u_1 + & (\lambda - a_{22})u_2 - & \dots & - a_{2n}u_n = 0 \\
: & : & & : \\
- a_{n1}u_1 - & a_{n2}u_2 - & \dots & + (\lambda - a_{nn})u_n = 0
\end{array}$$

denklemlerinde yerlerine yazılarak, $u_1, u_2, \dots, u_n$ değerleri hesaplanır. Burada u 'lar; öz yönleri belirlemektedir. Konuya bir örnek olarak;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin öz değer ve öz vektörlerinin hesaplanması verilebilir. Çözüm için; yukarıda anlatılanlara göre; A matris önce,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazılarak, } \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

determinant açılımı sıfıra eşitlenir. Bu açılmadan, λ öz değerlerinin bir fonksiyonu olan karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemin çözümünden, karakteristik kökleri yada öz değerleri; $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ olarak hesaplanır. Bu öz değerlerin her birine karşılık gelen birer U öz vektörleri yada öz yönleri bulunmaktadır. her bir öz değerinin ayrı, ayrı

$$\begin{bmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (\lambda - a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

denklem sistemine yerine yazılması ile aranan sonuca ulaşılabilir. Buradan; $\lambda_1 = 5$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü;

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde elde edilen homojen denklem sisteminin birinci bilinmeyeni için $u_1 = 2$ seçilen değeri için diğer bilinmeyenleri de hesaplanarak elde edilen $u_2 = -1$ ve $u_3 = 0$ değerlerine göre ifade edilebilen,

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

öz vektörü olmaktadır.

Benzer şekilde; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ içinde diğer öz vektörü;

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

denklem sisteminden, veya bunun yerine,

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$$

denkleminin $u_1 = 1$ seçilerek yapılan bağımsız çözümden, $u_2 = 0$ ve $u_3 = -1$ değerlerine göre ifade edilebilen

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektör olmaktadır.

Görüldüğü gibi burada, bir diğer sorun karakteristik denklemin derecesinin fazla olduğu zaman köklerinin hesaplanması olmaktadır. Bu sorun da; polinomların yada fonksiyonların köklerini hesaplamada kullanılan yöntemlerden birinin uygulanması ile giderilebilir.

4.4 Matrislerde Köşegenleştirme (*Diagonalisation*)

Bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare matrisinin, matris çarpımı yoluyla, köşegen matris haline dönüştürmesine matrislerde köşegenleştirme yada “*diagonalisation*” denir. Bu A kare matrisinin karakteristik denkleminin n adet kökü; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise, bu matrisin n adet öz

yönü yada öz vektörü bulunmaktadır. Bu yönler, yeni eksenler sistemi alınarak, A matrisinin;

$$d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir köşegen matris halinde ifade edilerek dönüştürülebileceğini göstermektedir. Bu şekilde, bir A kare matrisinin köşegen matris haline dönüştürülmesini olanaklı kılacak bir diğer, U matrisinin nasıl hesaplanabileceği sorunu; A kare matrisinin karakteristik denkleminin çözümünden elde edilen öz değerlerinin hesaplanmasından sonra her biri için hesaplanan öz yönleri yada öz vektörleri,

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \quad U_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}$$

ile oluşturulacak,

$$U = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

öz yönlerin karesi (*carré des modes*) matrisinden,

$$d = U^{-1} A U$$

dönüşümü yapılarak elde edilebilir. Burada; A matrisinin tüm $U_1; U_2 \dots U_n$ öz vektörleri; U matrisinin,

$$A U = \lambda U \quad \text{veya} \quad (\lambda I - A) U = 0$$

ilişkileri ile elde edilen homojen denklem sisteminin $\det(\lambda I - A) = 0$ katsayıları matrisine göre elde edilen karakteristik denkleminin çözümünden bulunan n adet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kök değerlerinin $(\lambda I - A) U = 0$ yerlerine yazılması ile, yukarıda yapılan işlemlere benzer şekilde, her biri için hesaplanmış ve aynı zamanda; U matrisin de $U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n$ öz vektörlerinden oluşan bir matris olduğu için, genel $A U = \lambda U$ ifadesine göre her biri için,

$$\begin{aligned}
A U_1 &= \lambda_1 U_1 \\
A U_2 &= \lambda_2 U_2 \\
&\vdots \\
A U_n &= \lambda_n U_n
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu işlemin sol tarafı $A[U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]$ ve sağ tarafı da $[\lambda_1 U_1 \ \lambda_2 U_2 \ \dots \ \lambda_n U_n]$ şeklinde gösterilebilir. Her birinin yerine, matris gösterimi ile kısaca,

$$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]$$

ve

$$[\lambda_1 U_1 \ \lambda_2 U_2 \ \dots \ \lambda_n U_n] = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = U d$$

neticede de $AU = Ud$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan U^{-1} ile çarpıldığında;

$$U^{-1}AU = U^{-1}Ud$$

ve $U^{-1}U = I$ olduğundan,

$$d = U^{-1}AU$$

olur. Buradan da; $A = U d U^{-1}$ şeklinde çözülebilir. Benzer düşünce ile; bir matris çarpımının determinanı, çarpanlarının determinantlarının çarpımına eşit olacağından,

$$\det A = (\det U)(\det d)(\det U^{-1}) = \det d$$

oluğu görülür. Bir örnek olarak;

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin ele alınarak, determinantının ve inversinin hesaplanması yapılsın. Çözüm. Bu matrisin bilinen yol olan alışla gelen şekilde;

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 14 \text{ ve inversi de } A^{-1} = \frac{Adj A}{\det A} \text{ bağıntısından}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Aynı çözümler, bu matrisin köşegenleştirmesinden hesaplanabilmesi için, önce A matrisi, $\det(\lambda I - A) = 0$ bağıntısına uygun şekilde,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -6 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$$

yazılıp determinantı açıldığında, karakteristik denklemi olarak, $\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ elde edilir. Bu denklemin çözümünden, $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 7$ öz değerleri yada karakteristik kök değerleri elde edilir. Buradan; $\lambda_1 = 2$ için öz vektörleri;

$$\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -6 \\ -1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

deki λ değeri yerine yazılarak elde edilen,

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

veya açık şekildeki ifadesi olan,

$$\begin{aligned} -3u_1 - 6u_2 &= 0 \\ -u_1 - 2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

homojen denklem sisteminde, $u_1 = 2$ seçilerek, $u_2 = -1$ ve neticede;

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde; $\lambda_2 = 7$ alınarak bu matrisin ikinci öz vektörü;

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0$$

veya

$$\begin{aligned} -3u_1 - 6u_2 &= 0 \\ -u_1 - 2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

homojen denklem sisteminde, $u_1 = 3$ seçilerek, $u_2 = 1$ ve sonuçta,

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan, öz değer vektörlerinden oluşan U öz değer matrisi,

$$U = [U_1 \quad U_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Benzer şekilde, U matrisinin de inversi;

$$U^{-1} = \frac{Adj \ U}{\det U} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Tekrar özetlemek gerekirse;

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

kare matrisi için köşegenleştirilmiş veya *diagonal* matrisi,

$$d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ve öz değer vektörlerinden oluşan öz değer matris de

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ inversi de } U^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Buradan; A matrisinin determinanı da

$$\det(d) = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 14$$

veya

$$\det A = (\det U)(\det d)(\det U^{-1}) = \det d$$

bağıntısından,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = (5)(14)(0.20) = 14$$

olarak hesaplanır.

4.5 Matris Fonksiyonları ve Cayley-Hamilton Teoremine Göre Bir Kare Matrisin İncersi

Bilindiği gibi matematikte, x gibi bir cebrik değışkenin n . dereceden fonksiyonu;

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

olarak ifade edilebilmektedir. Böyle bir fonksiyonda; x değışkeni yerine A gibi bir kare matris kullanılması halinde,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + A_0$$

elde edilen ifadeye matris fonksiyonu denir. Bu fonksiyon; matris matematiğinde, *Neumann serisi* olarak bilinir.

Benzer şekilde, bir A kare matrisin öz değırlere göre,

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

şeklinde ifade edilen karakteristik denkleminde; λ öz değeri yerine, *Cayley-Hamilton teoremine* göre, matrisin kendisi yazıldığında,

$$A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-2} A^2 + a_{n-1} A + \alpha_n I = 0$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklem; A^{-1} ile çarpıldığında,

$$A^{-1} A^n + \alpha_1 A^{-1} A^{n-1} + \alpha_2 A^{-1} A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A^{-1} A + \alpha_n A^{-1} I = A^{-1} 0$$

veya

$$A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \alpha_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-2} A + a_{n-1} I + \alpha_n A^{-1} = 0$$

elde edilir. Buradan; A^{-1} matrisin invers değeri çekildiğinde;

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} \{A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \alpha_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I\}$$

gibi bir bağıntı elde edilmiş olur. Bu denklem; bir matrisin *Cayley-Hamilton* teoremine göre inversini hesaplamada kullanılan bir formül olmaktadır. Konuya bir örnek olarak;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisin inversinin *Cayley-Hamilton teoremine* göre hesaplanması verilebilir. Bu problemin çözümü için; matrisin boyutu $n=3$ olduğundan yukarıda verilmiş olan formül,

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_3} \{A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I\}$$

olarak yazılır. Önce, bu matrisin karakteristik denklemi;

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 3 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 0 \end{bmatrix} = 0$$

dan

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$$

olarak elde edilir. Bu karakteristik denklemin katsayılarından,

$$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = 2 \quad \text{ve} \quad \alpha_3 = 6$$

oldukları görülür. Sonra buradan

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_3} \{A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I\}$$

bağıntısına göre invers matrisi,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \left\{ \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.