

### 5.2.2 DOĞRUSAL OLMAYAN( *NON-LİNEER*) DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Doğrusal olmayan  $n$  bilinmeyenli denklemlerden  $n$  adetinin birlikte ele alındığı denklem takımına *doğrusal olmayan* yada *non-lineer* denklem sistemi denir. Böyle bir denklem sisteminde; bütün denklemleri ayrı, ayrı yada diğer bir ifade ile tümünü aynı anda sıfır yapan,  $n$  adet bilinmeyenli birlikte çözülmesinde çeşitli çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Böyle, yöntemlerden her biri; az da olsa, sözü edilmiş olan doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için kullanılan yöntemlerin değişik şekilde kullanılmasından elde edilmektedir.

#### 5.2.2 Basit İterasyon Yöntemine Göre Çözüm

Basit iterasyon yöntemine göre doğrusal olmayan bir denklem sisteminin çözümünde, doğrusal olmayan bir denklemin basit iterasyon yöntemiyle köklerinin hesaplanmasına benzer şekilde, burada;

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &: \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindeki  $n$  bilinmeyenli  $n$  adet doğrusal olmayan denklemden oluşan bir denklem sistemi ele alınmaktadır. Böyle bir denklem sisteminin basit iterasyon yöntemine göre çözebilmek için, önce her denklemden,

$$\begin{aligned} \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \right| \right\}_0 &< 1 \quad \text{veya} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right| < 1 \\ \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \right| \right\}_0 &< 1 \quad \text{veya} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_2} \right| < 1 \\ &: \\ \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right| + \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_n} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right| \right\}_0 &< 1 \quad \text{veya} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \right| < 1 \end{aligned}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir bilinmeyen çekilerek, her bir doğrusal olmayan  $n$  bilinmeyenli denklem için bir tarafı koordinat sisteminin orijininden geçen bir doğru, diğer tarafı bir fonksiyon olan, iki ayrı bileşen fonksiyona ayrılır. Bu özellikleri içerecek şekilde, her bir fonksiyonun iki ayrı bileşen fonksiyonlara ayrılması neticesinde de;

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &: \\ x_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

şeklindeki bir iterasyon fonksiyon sistemi elde edilmiş olur. Çözüm için bu iterasyon fonksiyonlar sisteminin sağ tarafındaki her bir,

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

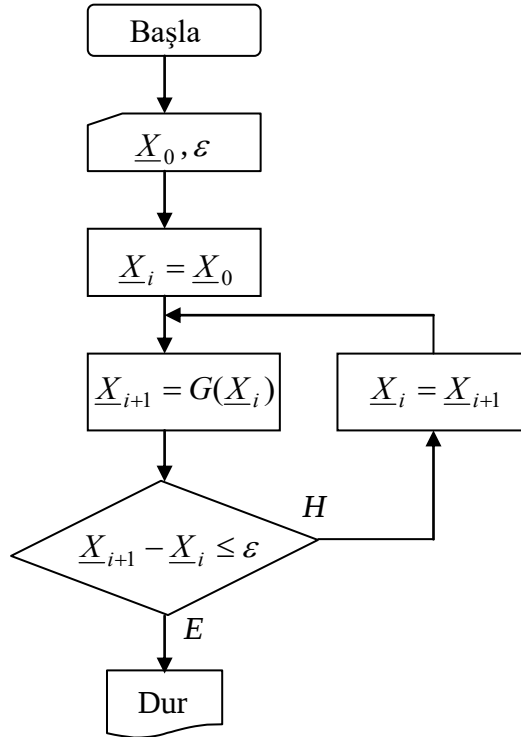
fonksiyonları, seçilen başlangıç değerlerine göre yakınsamaları gerekmektedir. Yakınsama koşulunun sağlanması halinde; bu fonksiyon sistemini,

$$\underline{X} = G(\underline{X})$$

şeklinde ifade ederek, her bir bilinmeyen için,

$$\underline{X}_{i+1} = G(\underline{X}_i)$$

şeklinde bir iterasyon bağıntısı elde edilir. Bu duruma ilişkin basit bir hesap algoritması ,



şeklinde verilebilir.

Bu amaçla, çok değişkenli herhangi bir denklem sisteminin Basit iterasyon yöntemine göre çözümünde; gerçek kök değerleri için önce birer başlangıç değerleri seçilerek iterasyona başlanır. Sonra, ilk iterasyondan elde edilen sonuçlar ikinci iterasyonda yaklaşık değer kabul edilerek benzer işlemler tekrarlanır. Bir sonraki iterasyondan elde edilen kök değerlerinin bir önceki adımdan hesaplanmış değerlerden farkı arzulanan sonuçlara ulaştığında iterasyon durdurularak, son adımdan bulunan değerler denklem sisteminin gerçek kökü alınır. Aksı halde; ardışık komşu iki itersayon sonuçları arasındaki farkın ön görülen küçüklükteki

değere ulaşıncaya kadar iterasyona devam edilir. Gerçek kökler için ön görülen bu değer sıfır olmalıdır.

**Örnek 1:**

$$\begin{aligned}x + 3 \log x - y^2 &= 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Doğrusal olmayan denklem sistemini köklerini; yaklaşık kök değerleri olarak  $x_0 = 3.4$  ve  $y_0 = 2.2$  başlangıç değerlerini kullanarak basit iterasyon yöntemine göre hesaplayınız.

**Çözüm 1:** Bu denklem sistemi basit iterasyon yöntemine göre çözülebilmesi için, her bir satırındaki denklemi, önce iki basit bileşen fonksiyonlarına ayrılır. Bu fonksiyonun basit bileşen fonksiyonlarına ayrılması iki farklı şekilde yapılabilir. Bunlar;

$$\begin{aligned}x &= y^2 - 3 \log x \\ \text{a)} \quad y &= 2x + \frac{1}{x} - 5\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad x &= \frac{x(y+5)-1}{2x} \\ y &= \sqrt{x+3 \log x}\end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

Bunlardan herhangi birine göre basit iterasyon çözümünün gerçekleştirilmesi için;

**a)** şıkkındaki bölmeden elde edilen,

$$\begin{aligned}g_1 &= y^2 - 3 \log x \\ g_2 &= 2x + \frac{1}{x} - 5\end{aligned}$$

veya

**b)** şıkkındaki bölmeden elde edilen,

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{x(y+5)-1}{2x} \\ g_2 &= \sqrt{x+3 \log x}\end{aligned}$$

sağ taraf fonksiyonlarından her ikisinde yada en az birinde,

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \right\}_0 < 1$$

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \right\}_0 < 1$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir.

Bu koşul,  $\log x = \log e \ln x \cong 0.434 \ln x$  olduğu dikkate alınarak: **a)** şıkkı için incelendiğinde,

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \right\}_0 = |2.297| > 1$$

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \right\}_0 = |4.4| > 1$$

olduğundan bu şekildeki basit fonksiyonlara ayırmada çözüm yakınsamamaktadır. Bu durum iterasyon işlemleri yapılarak da,

| <i>i</i>                           | <i>x</i> | <i>y</i> |
|------------------------------------|----------|----------|
| 0                                  | 3.4      | 2.2      |
| 1                                  | 3.25     | 2.09     |
| 2                                  | 2.83     | 1.01     |
| 3                                  | .....    | .....    |
| <i>İterasyon yakınsamamaktadır</i> |          |          |

yakınsamamanın gerçekleşmediği ilgili iterasyon çözümü sonuçlarından açıkça görülmektedir. Sonuçta; her işlem adımından hesaplanan iterasyon değerleri, gittikçe denklem sistemini gerçek kökleri olan  $x=3.48$  ve  $y=2.26$  değerlerinden uzaklaştığı açıkça görülmektedir.

Buna karşılık; **b)** şıkkında;

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \right\}_0 = |0.309| < 1$$

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \right\}_0 = 0 < 1$$

olduğundan, buradan basit iterasyon yöntemine göre yapılacak bir çözüm yakınsak olmaktadır. Neticede, denklem sisteminin kökleri; bu şekildeki basit fonksiyonlara ayırmadan,  $x_0 = 3.4$  ve  $y_0 = 2.2$  başlangıç değerlerine göre,

| <i>i</i> | <i>x</i> | <i>y</i> |
|----------|----------|----------|
| 0        | 3.4      | 2.2      |
| 1        | 3.45     | 2.23     |
| 2        | 3.46     | 2.25     |

ikinci iterasyon adımından  $x = 3.46$  ve  $y = 2.25$  olarak hesaplanabilmektedir.

**Örnek 2;**

$$\begin{aligned}x^2 + \sin y - 9.2 &= 0 \\ \ln x + y + xy - 1.9 &= 0\end{aligned}$$

Doğrusal olmayan denklem sistemini köklerini; yaklaşık kök değerleri olarak  $x_0 = 2.5$  ve  $y_0 = 0$  başlangıç değerlerini kullanarak basit iterasyon yöntemine göre hesaplayınız.

**Çözüm 2:** Önce bu denklem sisteminin basit iterasyon yöntemine göre çözülebilmesi için, her bir satırındaki denklemi;

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{9.2 - \sin y} \\ y &= \frac{1.9 - \ln x - y}{x}\end{aligned}$$

bileşen fonksiyonlarına ayrılır. Bu şekilde; basit iterasyon fonksiyonlarına ayrılmış fonksiyon eşitliğinin sağ tarafındaki iterasyon fonksiyonları,

$$\begin{aligned}g_1 &= \sqrt{9.2 - \sin y} \\ g_2 &= \frac{1.9 - \ln x - y}{x}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan yapılacak basit iterasyon çözümü, basit iterasyon yöntemi gereği,

$$\begin{aligned}\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \right\}_0 &= |-0.32| < 1 \\ \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \right\}_0 &= |-0.57| < 1\end{aligned}$$

koşulu sağlandığı için yakınsayacaktır. Neticede; bu fonksiyonlar kullanılarak çözüm yapıldığında;

| $i$ | $x$   | $y$   |
|-----|-------|-------|
| 0   | 2.5   | 0     |
| 1   | 3.033 | 0.393 |
| 2   | 2.969 | 0.131 |
| 3   | 3.011 | 0.229 |
| 4   | 2.995 | 0.189 |
| 5   | 3.002 | 0.205 |
| 6   | 2.999 | 0.198 |

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 7 | 3.000 | 0.201 |
|---|-------|-------|

7. iterasyonun sonunda  $x=3.000$  ve  $y=0.201$  olarak hesaplanır.

### 5.2.2.2 Newton-Raphson Yöntemine Göre Çözüm

*Newton-Raphson* yöntemine göre doğrusal olmayan bir denklem sisteminin köklerini hesaplamak için, doğrusal olmayan denklemlerin köklerinin hesaplanmasında olduğu gibi, temel ilke olarak *Taylor* seri açılımından faydalanılmaktadır. Bu amaçla;

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &: \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olan doğrusal olmayan denklem sistemindeki her bir  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değişkenleri için birer adet  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  başlangıç yada ilk yaklaşık kök değerleri seçilir. Bunların her birinin gerçek kök değerleri ile olan farkları;  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  seçilirken, bunların küçük miktarlar olmalarına yani;  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  yaklaşık değerleri ile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerinin birbirlerine çok yakın değerler olmalarına dikkat edilmelidir. Yani;  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  değerlerinin küçük değerler olmaları gerekmektedir. Ayrıca; doğrusal olmayan denklem sisteminin her bir parametre için  $x_1 = x_1^0 + dx_1$ ,  $x_2 = x_2^0 + dx_2, \dots$ ve  $x_n = x_n^0 + dx_n$  yaklaşık değerlerine göre seçilmiş ifadelerine göre *Taylor* serisine açılmaları neticesinde, ikinci ve daha yüksek dereceden terimlerin sonuçlar üzerindeki etkileri çok küçük değerler olacaklarından, bütün işlemlerde göz ardı edilebilirler. Sonuçta, böyle bir kabul neticesinde, birinci dereceden doğrusal terimlerin kullanıldığı;

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 dx_n = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 dx_n = 0 \\ &: \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0 dx_1 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_0 dx_n = 0 \end{aligned}$$

sonuçlar elde edilir. Bu ifadenin matris biçiminde ifadesi için;

$$\underline{F}(\underline{X}^0) = \begin{bmatrix} f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \vdots \\ f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{bmatrix} ; \underline{J}_{n \times n} = \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_1}{\partial x_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_1}{\partial x_n})_0 \\ (\frac{\partial f_2}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_2}{\partial x_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_2}{\partial x_n})_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{\partial f_n}{\partial x_1})_0 & (\frac{\partial f_n}{\partial x_2})_0 & \dots & (\frac{\partial f_n}{\partial x_n})_0 \end{bmatrix} \text{Jacabien}$$

$$\underline{dx}^T = [dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_n]$$

olmak üzere;

$$\underline{F}(\underline{X}^0) + \underline{J} \underline{dx} = 0$$

denklemini yazılabilir.

Bu denklemde;  $\underline{F}(\underline{X}^0)_{n \times 1}$ ;  $n \times 1$  boyutunda bir vektör,  $\underline{J}_{n \times n}$   $n \times n$  boyutunda bir matris ve  $\underline{dx}_{n \times 1}$ ;  $n \times 1$  boyutunda bir vektörü göstermektedir.

Buradan;  $\underline{J}^{-1}$  invers matris kullanılarak yapılacak çözümden yaklaşık kök değerlerine getirilecek düzeltme değerleri,

$$\begin{aligned} \underline{J} \underline{dx} &= -\underline{F}(\underline{X}^0) \\ \underline{dx} &= -\underline{J}^{-1} \underline{F}(\underline{X}^0) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu değerlerin, yukarıda yapılan tanım gereği,

$$\underline{dx} = \underline{X} - \underline{X}^0$$

olduklarından dolayı,  $\underline{X}$  çözüm vektörü,

$$\underline{X} = \underline{X}^0 - \underline{J}^{-1} \underline{F}(\underline{X}^0)$$

olarak bulunur. Bu bağıntı; *Newton-Raphson* yöntemine göre dorusal olmayan denklem sisteminin çözümünde kullanılan temel ifade olmaktadır. Bu ifade, doğrusal olmayan denklem sistemlerinin Taylor seri açılımında ikinci ve daha yüksek dereceden terimlerin ihmal edilmesi sonucunda elde edilmiş olduğundan, doğrudan istenen çözümü vermemektedir. *Non-linear* denklem sisteminin gerçek köklerinin hesaplanmasında bu bağıntı,

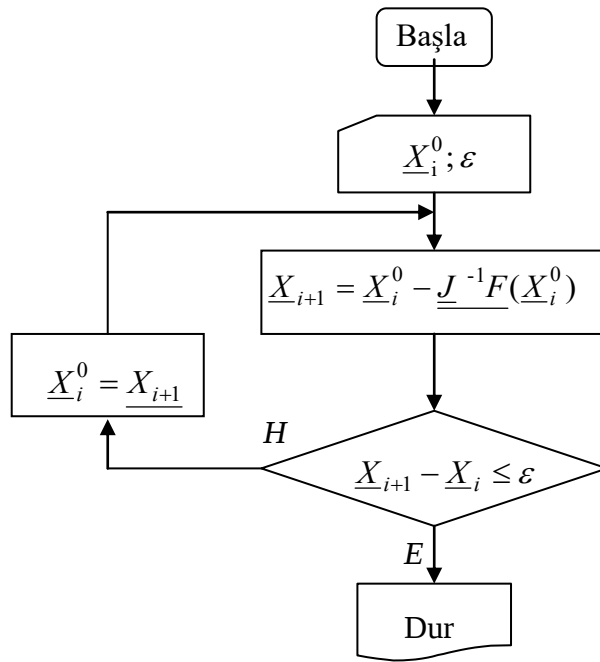
$$\underline{X}_{i+1} = \underline{X}_i^0 - \underline{J}^{-1} \underline{F}(\underline{X}_i^0)$$

şeklinde iteratif olarak uygulanarak aranan kök değerleri elde edilmektedir.

Bu amaçla uygulanacak bir iterasyon işlemi; önce tüm kökler için başlangıç değeri olan birer yaklaşık kök değerleri seçilir. Bu değerlerle iterasyon işlemleri yapılarak kökler için gerçek kök değerlerine daha yakın değerler elde edilir. Bu değerlerle başlangıç değerlerinin farkı;  $\varepsilon$  kök değerleri için önceden belirlenmiş bir sınır değeri olmak üzere,

$$\underline{X}_{i+1} - \underline{X}_i \leq \varepsilon$$

olması durumunda iterasyon durdurularak bulunmuş olan en son değerler aranan kök değerleri olarak alınmaktadır. Aksi halde; bir önceki adımda yapılan işlemlere benzer şekilde tekrarlanarak, iterasyona devam edilir. Koşulun sağlanması halinde, tüm iterasyon işlemleri durdurularak en son adımdan hesaplanan değerler aranan kökler olmaktadır. Böyle bir iterasyon işlemine ilişkin hesap algoritması,



şeklinde kısaca özetlenebilmektedir.

**Örnek:**

$$f_1(x, y) = x^3 + 10x - y - 5 = 0$$

$$f_2(x, y) = x + y^3 - 10y + 1 = 0$$

doğrusal olmayan bir denklem sisteminin köklerini;  $x_0 = 0.6$  ve  $y_0 = 0.6$  başlangıç değerlerini kullanarak *Newton-Raphson* yöntemine göre hesaplayınız.

**Çözüm:** *Newton-Raphson* yöntemi gereği; katsayılar matrisi,

$$J = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_0^2 + 10 & -1 \\ 1 & 3y_0^2 - 10 \end{bmatrix}$$

ve sabit terim vektörü,

$$F(\underline{X}_i^0) = \begin{bmatrix} x_0^3 + 10x_0 - y_0 - 5 \\ x_0 + y_0^3 - 10y_0 + 1 \end{bmatrix}$$

ilk adım yaklaşık değerleri vektörü de;

$$\underline{X}_i^0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

alınarak iteratif çözümler yapılır. İlk adımda; katsayılar matrisi  $x_0 = 0.6$  ve  $y_0 = 0.6$  için;

$$J = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_0^2 + 10 & -1 \\ 1 & 3y_0^2 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.08 & -1 \\ 1 & -8.92 \end{bmatrix}$$

kare matrisi hesaplanır. Sonra bu matrisin inversi;

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 11.08 & -1 \\ 1 & -8.92 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-97.8336} \begin{bmatrix} -8.92 & -1 \\ 1 & 11.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.091175 & 0.010221 \\ -0.010221 & -0.113254 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Daha sonra sabit terimi de;

$$F(\underline{X}_i^0) = \begin{bmatrix} x_0^3 + 10x_0 - y_0 - 5 \\ x_0 + y_0^3 - 10y_0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.616 \\ -4.184 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Buradan;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.091175 & 0.010221 \\ -0.010221 & -0.113254 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.616 \\ -4.184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5866 \\ 0.1324 \end{bmatrix}$$

hesaplanır. İkinci iterasyon adımı, elde edilen,  $x_1 = 0.5866$  ve  $y_1 = 0.1324$  bu değerler yaklaşık kök değeri olarak;

$$J = \begin{bmatrix} 11.0323 & -1 \\ 1 & -8.9474 \end{bmatrix} ; J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.09148 & 0.009196 \\ -0.009196 & -0.101453 \end{bmatrix}$$

ve

$$F(\underline{X}_i^0) = \begin{bmatrix} 0.93545 \\ 0.26492 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve vektörü hesaplanır. Benzer hesaplamalardan,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 0.09148 & 0.009196 \\ -0.009196 & -0.101453 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.93545 \\ 0.26492 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5010 \\ 0.1678 \end{bmatrix}$$

kök değerleri elde edilir. Aynı şekilde yapılan üçüncü adım hesaplamalardan,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0.5056 \\ 0.1500 \end{bmatrix}$$

kökler bulunmuş olur. Bu işlemler ilk yaklaşık kök değerleri için  $x_0 = 0.6$  ve  $y_0 = 0.6$  değerlerini alarak,

| $i$ | $dx_i$  | $dy_i$  | $x_{i+1} = x_i - dx_i$ | $y_{i+1} = y_i - dy_i$ |
|-----|---------|---------|------------------------|------------------------|
| 0   | 0.0134  | 0.46756 | 0.5866                 | 0.1324                 |
| 2   | 0.0856  | -0.0355 | 0.5010                 | 0.1679                 |
| 3   | -0.0046 | 0.01784 | 0.5056                 | 0.1501                 |

şeklinde tablo halinde özetlenebilirler. Neticede; bu denklem sisteminin kökleri  $x=0.5056$  ve  $y=0.1501$  olarak hesaplanmış olur.

## ÖRNEK PROBLEMLER

**Problem:** Aşağıdaki *non-linear* denklem sistemlerini çözünüz,

$$1) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 &= 0 \\ 4x^2 + 3\sqrt{3}xy + y^2 - 22 &= 0 \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 16 &= 0 \\ xy^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} -x^2 + xy - y + 7x - 11 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

|    |                           |    |                                    |
|----|---------------------------|----|------------------------------------|
|    | $xyz - 1 = 0$             |    | $x^3 - 10x + y - x + 3 = 0$        |
| 3) | $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ | 5) | $y^3 + 10y - 2x - 2z - 5 = 0$      |
|    | $x^2 + 2y^2 - 3 = 0$      |    | $x + y - 10z + 2 \sin z + 5 = 0$   |
| 6) | $x^2 + y^2 - 4 = 0$       | 7) | $2.1 \sin x + 0.6 \cos y - 3x = 0$ |
|    | $e^x + y - 1 = 0$         |    | $2.1 \cos x - 0.6 \sin y - 3y = 0$ |
|    | $y - x = 0$               |    | $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$          |
| 8) | $5x - y - xz = 0$         | 9) | $x^2 + z^2 - 0.25 = 0$             |
|    | $xy - 16z = 0$            |    | $x^2 + y^2 + 4z = 0$               |