

1. GİRİŞ

Tanınmış tarihçi LAFARA 1973 söylediğine göre; bugün bile ilk kullanım tarihi ve sınırları kesin olarak bilinmemekle birlikte, *Nümerik Analizin* çok eski yıllardan beri farklı şekillerde ve isimler altında kullanıldığı ilgili birçok kaynaklarda yer aldığı söylenmektedir. Bunun açık bir kanıtı olarak; bundan yaklaşık 3700 yıl önce, *Babililer'in* ikinci dereceden bir denklemin çözülerek köklerinin nasıl bulunabileceğini, tam sayıların kareköklerinin yaklaşık olarak nasıl hesaplanabileceğini ve bileşik faizle ilgili bazı problemlerin lineer *enterpolasyon* yöntemiyle nasıl çözülebileceğini, bildiklerini ilgili kaynaklarda rastlamak mümkündür (AKTAŞ, ÖNCÜL, URAL, 1981). Yine bundan yaklaşık 2000 yıl önce, “*günümüzde Gauss Eliminasyon Yöntemi*” olarak bilinen, lineer denklem sistemlerinin çözümüyle ilgili bir örnekte matris gösteriminin kullanılmış olduğu bazı *Çinli* kaynaklarda ayrıca ifade edilmektedir. Benzer şekilde, bazı *Çinli* matematikçilerin (960-1279) yılları arasında yüksek dereceli denklemlerin nümerik çözümü için, *iteratif* yaklaşma yöntemini genelleştirdiklerine de ilgili kaynaklarda rastlamak mümkündür (FAUSETT, 2003). Bunun neticesinde; önceleri lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmış olan matris gösterimi ve genelleştirilen yeni çözüm teknikleri, aynı zamanda yüksek dereceli denklemlerin çözümü için de genişletilmiş olmaktadır. Konuyla ilgili bir diğer örnek; bundan yaklaşık 900 yıl önce yaşamış *Ö. Hayam* 'ın üçüncü dereceden denklemlerin çözümüyle ilgili yapmış olduğu araştırmalar ve neticede keşfetmiş olduğu yeni çözüm yöntemi, yayınlamış olduğu kendi eserinde yer almaktadır. Bunu takip eden yıllarda, halen günümüzde *Horner* yöntemi olarak genel cebir denklemlerinin çözümünde kullanılmakta olan bir diğer algoritmanın 1436 yılında ölen *Çemşid El-Kaşi*, tarafından *kübik* denklemlerin *iteratif* ve *trigonometrik* yöntemlerle çözümünde kullanılmış olduğunu ayrıca ilgili kaynaklarda rastlamak mümkündür. Hatırlanacağı gibi, ; *W.G. Horner* daha sonra, 1819 yılında, bu konudaki eski çalışmalardan habersiz olarak yapmış olduğu bazı çalışmaları kendi adıyla yeniden yayınlamıştır. Benzer şekilde, *İskoçyalı John Napier* 1614 yılında *logaritma tablosunu* düzenleyerek yayınlamış ve neticede böyle bir çalışma sonucunda birçok hesaplamalar için kullanılabilecek ve günün koşullarına cevap verecek şekilde bir hesaplama aracı hizmete sunulmuştur. Bugün *Newton* ya da diğer adıyla *Newton-Raphson* yöntemi olarak bilinen bir yöntemin; 1700 yılından önce sadece bir *polinomun* köklerini *iteratif yaklaşım* yoluyla bulmada kullanıldığını ve daha sonraları, 1740 yıllarında *Thomas Simpson* tarafından bu yöntemin daha da genişletilerek genel fonksiyonlar içinde kullanılabilir olduğunun kanıtlandığı ilgili kaynaklarda ayrıca yer almaktadır. Nümerik analizde, adından sıkça söz edilen *Taylor* serisi; *Brook Taylor* tarafından 1715 yılında kuramsal olarak ele alınarak incelenmiş ve sonuçları genel hatları ile yayınlanmıştır. Ancak, bu

formülün kalan terimi hakkında ilk bilgi daha sonraları, 1797 yılında *Joseph Louis Lagrange* tarafından incelenerek verilmiştir. Günümüzde adı diferansiyel denklemlerin çözümüyle ilgili kullanılan ve bilinen şimdiki adıyla *Runge-Kutta* yöntemi; bundan yaklaşık 100 yıl önce alman uygulamalı matematikçilerinden *Carl Runge* (1856-1927) ve *M. W. Kutta* (1867-1944) tarafından geliştirildiği ilgili kaynaklarda ayrıca belirtilmektedir (FAUSETT, 2003).

Uygulamalı matematikte konuyla ilgili bu gibi gelişmelere paralel olarak, çoğu zaman sayısal çözümleme ile ayrılmaz bir bütün olan hesaplama araçlarında da bu geçen süre içerisinde benzer şekilde çeşitli gelişmelerden bahsetmek mümkündür. Bu amaçla kullanılmış ilk ve en ilkel hesaplama aracı; üzerine düğümler atılmış bir *ipin* olduğu ilgili kaynaklarda söylenmektedir. Daha sonraları aynı amaca yönelik geliştirilmiş bir diğer hesaplama aracı; *Çinliler* ve *Greekler* ‘in birbirlerinden habersiz keşfettikleri ‘*Abakus*’lerdir. *Abakusler* bugün dahi birçok doğu ülkelerinde çeşitli pratik amaçlı aritmetik işlemlerin yapılmasında bir hesaplama aracı olarak kullanılmaktadır. Ancak, *Abakusle* yapılan hesaplamalarda eldekileri işlemlere katmak oldukça zor ve yetenek gerektirdiğinden bunları kullanmak sanıldığı kadar kolay olmamaktadır. Çoğu zaman, bir hesaplama aracı olarak kullanılabilmesi için özel beceri gerektirmektedir. Bu gibi zorluklarda kurtulmak için daha sonraki yıllarda *Abakus* ‘lerin yerine, biraz daha pratik sayılabilen bir diğer mekanik hesaplama aracı olan *sürgülü hesap cetvelleri*’ nin geliştirildiği görülmektedir. Bu amaca yönelik konu ile ilgili yapılmış ilk olumlu çalışmalar; 1620 yılında, İngiliz matematikçi, *Edmund Gunter*, daha önce 1614 yılında *John Napier* ‘in bulmuş olduğu logaritmaları bir doğru üzerinde işaretlemeyi başarmasıyla başlanmıştır. *Sürgülü hesap cetvelleri*’ nin de atası sayılabilecek bu hesaplama aracı ile *çarpma* ve *bölme* işlemleri yapabilmek için de bir *pergel* geliştirilerek kullanılmıştır. Bundan bir yıl sonra, bir başka İngiliz matematikçi olan *William Oughtred*, 1621 yılında, *Gunter* ‘in geliştirdiği bu sistemi daha da ileri düzeylere taşıyarak; çizgilerinin her ikisini birbiri üzerinde kayabilececek bir şekildeki düzenekte geliştirerek, hesaplamalarda *pergel* kullanma ihtiyacını ortadan kaldırmıştır. Konuyla ilgili birçok çalışmalar sonucunda, 1654 yılında *Robert Bissaker*, sabit bir gövdenin iki kısmı arasında kayabilen bir sürgüden ve iki tarafı sabit bir gövdeden oluşan ilk *sürgülü hesap cetvelini* yapmıştır. 1850 yılında, *Tavernier-Gravet*, sürgülü hesap cetvellerinde gösterge camı kullanarak ” *Mannheim*” *sürgülü hesap cetvelini* icat etmiştir. Hesaplama araçları ile ilgili farklı yıllarda yapılmış bu gibi olumlu gelişmelere ilaveten, daha ileri düzeyde aritmetik işlem yapabilen ilk *mekanik hesap makinesi*; ünlü Fransız düşünürü *Blaise Pascal* tarafından 1642 yılında geliştirilmiştir. Önceleri sadece *toplama* işlemi yapabilen bu tür hesap makineleri 1671 yılında *Gottfried Wilhelm Leibniz* tarafından geliştirilerek *çarpma* işlemi de yapabilen *mekanik*

hesaplayıcıyı; yani bugün “FACIT” ya da “kollu mekanik hesap makinesi” olarak da bilinen mekanik hesaplama aracını elde edilmiştir.

Bilindiği gibi, bu hesaplama araçları ile hesap yapmada işlemlerin sırası büyük önem taşımaktadır. Bu tür makinelerin mekanik sistemler olmaları, neticede bunlara böyle bir yeteneği vermek oldukça zor hatta bunların çoğu pratik amaçlar için kullanılabilmelerini zaman zaman olanaksızlaştırmaktadır. Çünkü, bu makinelerde işlem sırası kullanıcılar tarafından dışardan idare edilmektedir.

Sonuçta bu makinelerde böyle bir işlemin hesaplayıcıya yaptırılabilmesi için, 1801 yılında Fransız asıllı *Jacquard*’ın gerçekleştirdiği otomatik dokuma tezgahlarındaki sistemin, “*makinelere; üzerinde belli aralıklarda delikler bulunan bir kartonun her bir deliğine sıra geldiğinde hangi renk ipliğin kullanacağına karar vermesi prensibi*” çok büyük fikir katkısı sağlamıştır. Tarihinde, dokumacılıkta devrim sayılabilecek bu buluştan sonra, İngiliz Matematikçi; *Charles Babbage* ‘nin 1821 yılında işlemlerin birbiri ardı sırada yapabilen bir analitik makine tasarladığı ilgili kaynaklarda mevcuttur. Bu gün dahi bilgisayarların ilk atası sayılabilecek bir yenilik olan bu düşünce, ne yazık ki o yıllarda hemen uygulama olanağı bulamadığı ilgili kaynaklarda vurgulanmaktadır. *Babbage* ‘nin bugünkü bilgisayarlara düşünce ve kavram bakımından çok yakın sayılan bu son derece önemli fikirlerinden sonra bu yöndeki araştırmalar bazı nedenlerden dolayı bir süre duraklamalar yaşamıştır. Ancak, 1890 yılında, ABD yapılan nüfus sayımı sonuçlarını daha hızlı alabilmek için *H. Hollerith* tarafından geliştirilen makinenin yapılmasında, daha önce varlığı bilinen, *Pascal*, *Jacquard* ve *Babbage* ‘nin bu yöndeki buluşlarından çok büyük oranda faydalanılmıştır. Böylece; delikli kart sisteminin bilgisayarlarda kullanılmasının ilk adımı da atılmıştır. Bilindiği gibi, bilgisayar teknolojisinde kullanılmış olan bu delikli kart sistemine uygulamada *Hollerith kartları* veya kısaca *delikli kart sistemi* de denmektedir.

Daha sonraları, ilk bilgisayar, 1945 yılında ABD ‘de askeri amaçlar için yapılmış ve neticesinde kullanılmıştır. *UNIVAC* adlı bu bilgisayarlar 30 ton ağırlığında dev bir sistemden oluşmaktadır. Önceleri sadece askeri amaçlı işler için geliştirilmiş olan bu makinelerden birkaçı ABD ve İngiltere de sayılı üniversitelerde kullanılabildiyse de sivil amaçlı kullanılmalarına ilk defa 1953 yılında geçilerek piyasalarda satılmalarına başlanmıştır. Aynı yıllarda, *mıknatıslı şerit* ve *çekirdek bellekler* geliştirilerek, hızlı yazıcılar yapılmaya başlanmıştır. 1958 yılında bilgisayarların yapımında *transistörlerin* kullanılması ile de bilgisayar teknolojisinde yeni bir devir açılmıştır. Böylece ikinci kuşak sayılabilen bu dönemde, daha küçük boyutlu ve geniş kapasiteli bilgisayarların üretimi söz konusu olmuştur. 1965 yılında üçüncü kuşak sayılan daha karmaşık

fakat çok daha yetenekli, *transistörlerin* yerine *bütünleşik* devrelerin kullandığı bilgisayarlar geliştirilmiştir. Her geçen gün bilgisayar teknolojisinde yeni gelişmeler birbirini takip ederek, *Personel computer* diye tanınan *PC* 'ler ve daha sonraları ilgili her türlü yeni gelişmeler gerçekleştirilerek günümüzdeki duruma ulaşılmıştır.

Burada yapılan özet bazı açıklamalardan görüldüğü gibi; tarihinin belirli dönemlerinde sayısal hesap yapma yöntem ve teknikleri, kısaca nümerik analiz konuları ile ilgili çeşitli tarihsel gelişmeler, eskileri ile birlikte hiyerarşik bir düzen sırasında ele alınır; önceleri "*Approximate Computation*" veya "*Computational Mathematics*" gibi isimler altında ele alınmış olsalar bile, 1950 yıllardan sonra bu isimler yanında son zamanlarda, *Numerical Analysis*, (*son zamanlarda ülkemizde bu isim yerine yaygın olarak Sayısal Çözümleme kullanılmaktadır*), adının da sıkça kullanıldığı görülmektedir. Aynı zamanda bu tarih, bilimde sıradan bir tarih olmayıp, daha önce konuyla ilgili yapılmış bazı açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, farklı bilimsel ve teknolojik gelişmelerin birlikte hatırlanacağı bir tarih olmaktadır.

Özetle bu gelişmelerden biri; 1947 yılında *Los Angeles*'deki *Kaliforniya üniversitesinin* bünyesinde kurulmuş olan *Institu of Numerical Analysis* adlı enstitünün ilk defa bu tarihte kurulmuş olmasıdır. Bir diğeri ise; Bilgisayar teknolojisindeki çok önemli gelişmelerin bu tarihlere rastlamış olmasıdır. Bu durum, her iki farklı yöndeki gelişmelerin birbiriyle ne derece yakın ilişkide olduğunun bir kanıtı olmaktadır. Ayrıca bu tarih; uygulamalı matematik konuları ile ilintili olarak *matrisler* konusunda olduğu kadar birçok diğeri *lineer cebir* konularında da önemli gelişmelerin yapıldığı tarih olmaktadır.

Bu genel bilgilerin ışığı altında "*Sayısal Çözümleme*"; ilk bakışta sadece konusu itibarıyla ele alındığında, matematiğin veya uygulamalı matematiğin bir alt konusudur gibi düşünülebilir. Benzer şekilde, sadece kullanılan hesaplama araçları ve işlem algoritması yönünden ele alındığında bilgisayarlarla olan yakın ilişkisinden dolayı sanki bilişim veya bilgisayar mühendisliğinin bir alt konusu olduğu şeklinde düşünülebilir. Ancak, uygulamalı matematikte konular ağırlıklı olarak; sadece bir problemin çözümü için gerekli olan matematik modellerin kurulması yanı algoritma kurma ve çözme işlemleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Buna karşılık, bu bilgilerin sıkça uygulama alanı bulduğu bilgisayar mühendisliğinde ise; sadece modeli veya algoritması bilinen bir problemin bilgisayar yardımıyla çözümü için gerekli dillerin geliştirilmesi, donanımları, *algoritmik* çözüm süreçleri ve çeşitli sayısal işlemler konu edilmektedir. Sayısal çözümlemede ise hiçbir zaman amaç; sadece ne böyle bir modeli kurmak ne de sadece çözmektir. Sayısal çözümlemenin ana amacı, bir

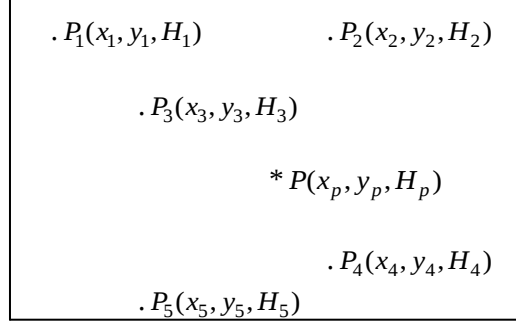
problemin çözümü için daha önceden bilinen bir modele göre çeşitli hesaplama araçlarını bir vasıta olarak kullanıp en doğru ve etkin sonuçlara az emek sarf ederek en kısa ve hızlı yoldan ulaşmaktır. Bu durumuyla, sayısal çözümleme doğrudan ne uygulamalı matematiğin, ne de bilgisayar mühendisliğinin bir alt disiplindir. Her ikisiyle belli bir oranda ilintili olan ve kendine özgü amaç ve hesaplama özelliklerini içeren ortak bir disiplin olduğu söylenebilir. Konunun böyle olduğunun daha anlaşılır olabilmesi için konuyla ilgili, aşağıda verilecek bazı açıklamaların derinlemesine incelenmesi daha da faydalı olur.

Konuyla ilgili basit bir örnek olarak, A şehrinden B şehrine doğru kara yolu ile giden bir aracın hızı belli zamanlarda ölçülerek, belli noktalar için,

$t_{(sn)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$v_{(m/sn)}$	15.2	14.1	14.0	15.0	14.5	16.0	15.4

olarak elde ediliyor. Bu şekilde analitik bağıntılar yerine gözlemlere dayalı deneysel veriler elde edilerek bu aracın $t = 0,35$ saniyedeki hızı, ivmesinin ve başlangıç noktasından itibaren kat ettiği yolun ne kadar olduğunun hesaplanması istenebilir. Şüphesiz burada bu aracın zamana bağlı olarak hızı bu şekilde değil de analitik bir fonksiyon olan $v = f(t)$ şeklinde sürekli türden analitik bir bağıntı ile verilmiş olsaydı; sorunun cevabı bilinen matematik kurallara göre bu analitik fonksiyonda $t = 0.35$ alınarak hızı, zamana göre türevi olarak ivmesi ve başlangıç noktasından itibaren entegrali alınarak da bu ana kadar kat ettiği yol doğrudan hesaplanabilir. Ancak, burada aracın hızı bu gibi bir analitik fonksiyon yerine, gözlemlere dayalı deneysel verilerle verilmiş olduğundan problemin çözümü bu yolla gerçekleştirilemez. Pratikte böyle bir sorun ancak, sayısal çözümlemenin bilinen konularından biri olan basit *Enterpolasyon* yöntemiyle cevaplandırılabilir. Benzer şekilde aynı problemde, aracın belli noktalardaki hızı yanında ivmesi de verilmiş olsaydı, işlemler daha da karmaşık bir duruma dönüşecektir. Bu gibi durumlarda hız değerleri ivme değerleri ile birlikte ele alınarak arzulanan sonuca ancak *Hermite çözüm* yaklaşımı ile ulaşılabilir.

Konuyla ilgili ikinci bir örnek, Arazide koordinatları bilinen bir $P(x_p, y_p)$ noktanın H_p yüksekliği, çevrede H_i ; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ yükseklikleri ve $P_i(x_i, y_i)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ koordinat değerleri bilinen noktalara göre sayısal arazi modeli biçiminde belirlenmek isteniyor(Şekil 1).



Şekil 1: Sayısal arazi modeli noktaları

Bu amaçla, çevre noktaların H_i yükseklikleri ve $P_i(x_i, y_i)$; $i=1, 2, 3, 4, 5$ düzlem koordinat değerleri;

$H_i(m.)$	103.6	105.6	107.0	104.5	106.9
$P_i(x, y)$	$P_1(x_1, y_1)$	$P_2(x_2, y_2)$	$P_3(x_3, y_3)$	$P_4(x_4, y_4)$	$P_5(x_5, y_5)$

olarak verilmektedir.

Burada verilmiş olan böyle bir problemin çözümü, eğer nokta yüksekliklerinin koordinat değerlerine göre yüzey denklemi $H = f(x, y)$ biçiminde koordinat değişkenlerinin analitik fonksiyon halinde bilinmiş olsaydı, bu denklemde $P(x_p, y_p)$ noktasının x_p, y_p koordinat değerlerini yerine yazmakla noktanın H_p yüksekliği doğrudan hesaplanabilirdi. Ancak, sayısal uygulamada böyle bir analitik denklem hiçbir zaman doğrudan bilinemediğinden x_p, y_p koordinat değerleri bilinen ve H_p yükseklik değeri bilinmeyen $P(x_p, y_p, H_p)$ noktasının yüksekliği, koordinat ve yükseklik değerleri doğrudan bilinen $P_i(x_i, y_i, H_i)$ çevre ya da dayanak noktalarına göre uygulanacak bir sayısal arazi modeli çözümü yoluyla kolayca hesaplanabilir.

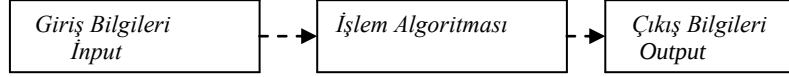
Benzer şekilde bir diğer örnek; fizikte *magnetik alan* problemini formülüze eden iki boyutlu *Poisson* denklemi; A : *vektörel potansiyeli*, J : *Akım yoğunluğunu*, v : *çözüm yapılacak ortamın magnetik direncini* göstermek üzere,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = J$$

olarak bilinmektedir. Burada verilmiş olan *Poisson* denkleminde ν değeri A değerinin doğrusal olmayan bir *non-linear* bir fonksiyonudur. Bu denklem fizikçiler tarafından uzun yıllar bilinmesine rağmen bazı özel durumlar dışında, çözümü gerçekleştirilememekteydi. Bugün ise yaygın bir şekilde uygulanan sayısal çözümleme yöntemleri ile bu denklem fazla sayıda doğrusal denklemlere dönüştürülerek, geniş kapasiteli bilgisayarların da kullanılması ile çözümü artık sorun olmaktan çıkmış, kolayca gerçekleştirilebilir hale gelmiştir. Örneğin, bu denklem sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmek istendiğinde; 100 ile 150 adet doğrusal eşitlik kurulması gerekmektedir. Bu gibi fazla sayıda doğrusal denklemden oluşan bir denklem sistemini elle çözmek önceleri oldukça zor bir işlem olması nedeniyle, günümüzde gerek matrislerin alt matrislere bölünmesi ve gerekse geniş kapasiteli bilgisayarların kullanılması ile artık sorun olmaktan çıkmıştır (AKPINAR, 1994).

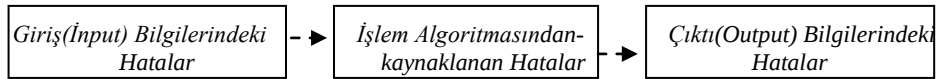
Benzer bir diğer örnekte, bir ülke ya da kıta büyüklüğündeki arazi parçalarını ölçmek için araziye birkaç kilometre aralıklarla işaretlenen sabit noktaların (*Nirengi noktalarının*) koordinatlarını tek bir koordinat sisteminde belirlemek için; her noktada yapılan gözlemlerden noktaların kesin koordinat değerlerini; En küçük kareler çözümüne göre hesaplamakta da rastlamak mümkündür. Bu durumda, gözlem sayısı kadar düzeltme denklemleri kurulmakta ve düzeltmelerin ağırlıklı karelerinin toplamını minimum kılan amaç fonksiyonuna göre de bilinmeyen sayısı kadar normal denklemler elde edilmektedir. Bu denklemlerin, katsayılar matrisinin boyutları çok büyük olacağından bunları her hangi bir şekilde çözmenin çok zor olabileceği gibi, bazı durumlarda *kondisyon* bozukluklarına da rastlanmaktadır. Bu gibi sorunlardan kurtulmak için; daha etkin çözüm yöntemleri kullanılarak, uygun kapasiteli bilgisayarlar yardımıyla ancak anlamlı sonuçlara ulaşmak mümkün olmaktadır. Böylece; hızlı ve geniş kapasiteli hesaplama aracı olan bilgisayarların ilk gelişme ve kullanma tarihi olan 1950 yıllar; aynı zamanda sayısal çözümlemenin veya matris matematiği gibi lineer cebir konularının da büyük gelişme ve önem kazandığı yıllar olmaktadır. Neticede, yapılan açıklamalardan, bu tekniklerin birbiriyle ne kadar yakın ilişkili ve iç içe oldukları, her durumda birbirlerini tamamlar konular oldukları bir kez daha, verilmiş olan örneklerden açıkça görülmektedir.

Matematikte bir problemin arzulanan çözümü; gerek bilgisayar, gerekse farklı hesaplama araçları kullanılarak çözüm için gerekli olan sonlu sayıdaki tüm ara işlemlerin belli bir sırada sürekli yapılarak elde edilmektedir. Çözüm için bu şekilde düzenli olarak yapılması öngörülen tüm işlem adımları hesaplama yönteminin matematik algoritması olarak adlandırılır. Böyle bir algoritma başlıca; *Input*, *İşlem* ve *Output* yada bir diğer ifade ile giriş, işlem ve sonuç bilgilerini içeren üç ayrı ünite halinde ele alınabilir (Diyagram.1)



Diyagram.1: Sayısal çözümlemede işlem akışı

Bir probleme ilişkin matematik modelin çözümü için kullanılabilecek çeşitli algoritmalarından hangisinin daha elverişli olduğu yargısına, algoritmanın *hızı*, *etkin* ve *doğru* sonuçlar vermesi gibi özelliklerinden faydalanılarak karar verilir. Zamanı en ekonomik kullanarak en kısa sürede sonuca ulaşmaya yarayan yöntem hız bakımından ekonomik olmakta ve daima tercih edilmektedir. Buna karşılık, sonuçların doğruluğu ya da gerçekçi olması, hafızaları en fazla yoran ve sürekli emek gerektiren bir diğer konu olarak her zaman önemini korumaktadır. Neticede, bir çözümde duyarlık kaybına neden olabilecek faktörlerin kaynağını teşkil eden *input* veri hataları veya algoritma hataları denetim altında tutulduğu sürece elde edilecek *output* ya da çıktı bilgileri istenen duyarlılıkta ve güvenilirlikte değerler olmaktadır. Özetle, bir çözüm algoritması için bu durum,



Diyagram. 2 : Sayısal çözümlemedeki hatalar

biçiminde ifade edilebilir (Diyagram. 2)

Sayısal çözümlemede, çeşitli problemleri çözmek için genellikle analitik fonksiyonlardan elde edilmiş kesin veriler yerine, gözlemlere dayalı deneysel veriler kullanıldığında her zaman *input* ya da *giriş* bilgilerindeki hataların sonuçlar üzerindeki etkilerinden söz etmek mümkün olur. Verilerdeki bu hatalar sonuç bilgilerine, çözüm için kullanılan algoritmanın fonksiyonel özelliklerine bağlı etki ederek sonuçları olumsuz yönde etkiler. Çözüm için *input* verisi olarak kullanılacak veriler hatasız olsalar bile, her problemle ilgili çözüm işlemleri, çözüm algoritmasına uygun belli işlem sırasında bilgisayarlar gibi çeşitli hesaplama araçları kullanılarak yapılmaktadır. Günümüzde, bütün hesaplama araçları her ne kadar geniş kapasiteli olsalar bile, onunda bir sınırı olması nedeniyle, belli bir doğrulukta işlem yapma kapasitesine sahiptirler. Bu hesaplama araçları işlemleri yaparken kapasite sınırını aşan terimleri ya dikkate almadan ya da yuvarlatarak işlemlere devam eder. Bu nedenle, algoritma

çözümünden elde edilecek sonuç bilgileri belli bir oranda hatalı olarak, gerçek değerden farklı değerler olarak elde edilecektir. Sayısal çözümlemede bu özellikteki hatalar yuvarlatma hataları (*Roundoff error*) ve kesme hataları (*Truncation error*) olarak adlandırılmaktadırlar. Sonuçta; sayısal çözümleme problemlerinin çözümü sırasında oluşan bu tür hatalar; yuvarlatma hataları (*Roundoff error*), kesme hataları (*Truncation error*) ve her türlü veri hataları, çözüm sonucunda elde edilen değerlerin gerçek veya gerçeğe en yakın doğru kabul edilebilecek değerler olması yönünden büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla, hesaplamalarda yapılabilecek bu tür hataların sonuçlar üzerindeki olumsuz etkileri veya sonuçların doğruluğu, bir diğer ifade ile hesaplanan sonuç bilgilerinin gerçek değerleri ne derece ifade edebildikleri bazı hata ölçütleri tanımlanarak ya da kullanılarak denetlenebilir. Sayısal çözümlemede bu durum her türlü problem çözümleri için bilinmesi gereken bir diğer konu olmaktadır.

Konuyla ilgili bu gibi kısa açıklamalardan sonra; sayısal çözümlemenin amacı, karmaşık nümerik analiz problemlerinin çok daha basit sayısal işlemleri kullanarak çözmek ve eldeki sonlu sayıdaki verilerden istenen nümerik sonuçlara ulaşmak için etkin yöntemleri seçerek, mevcut sonuçları değerlendirmektir diye ifade edilebilir. Buna göre sayısal çözümleme veya diğer adıyla nümerik analiz, *matematiksel modellerle ifade edilmiş çeşitli disiplinlere ilişkin problemlerin çözümünde belli sayıda ve sırada belirlenmiş işlemleri bilgisayarlar yardımıyla yaparak belli bir duyarlılığa sahip sonuçların elde etmesi için kullanılabilecek yöntemlerin bulunması, geliştirilmesi ve var olanların irdelenmesi ayrıca en etkin olanların tespit edilmesi* diye tanımlamak mümkündür.

Sonuç olarak; yukarıda sözü edildiği gibi sayısal çözümlemenin, fizik, kimya, biyoloji, işletme, ekonomi ve daha birçok mühendislik dalları gibi bazı uygulamalı matematiğe dayalı disiplinlerde kullanılması her geçen gün önemini daha da artırmaktadır. Deneysel bilgilere ve uygulamalı bilim dallarına dayalı olan mühendislik disiplinleri, her zaman doğada var olan olaylarla uğraştıklarından sayısal olarak ifade edilebilen gerçek, nesnel değerleri konu alırlar. Sanal konularla uğraşmazlar. Halbuki, nümerik analizin genel konuları içerisinde sanal çözümlere de yer verilmektedir. Böyle bir yaklaşım çerçevesinde, farklı mühendislik disiplinleri ile ilgili konular ele alındığında, burada daha çok teknik yönden her zaman basitçe uygulanabilir ve çözüm sonuçları *gerçek* ya da *reel* sayılardan oluşan sayısal yöntemlerin çözüm algoritmaları üzerinde durulacaktır. Yeri geldikçe bazı problemler için az da olsa sanal çözümlerden ayrıca söz edilecektir. Bu nedenle burada konu; daha çok *reel* problemlerle ilgili ve mühendislik disiplinleri yönünden önemli olan çözüm yöntemleri üzerinde yoğunlaştırılmıştır.

1. BÖLÜM

RAKAM VE SAYILARLA İLGİLİ BAZI TANIMLAR VE TEMEL İŞLEMLER

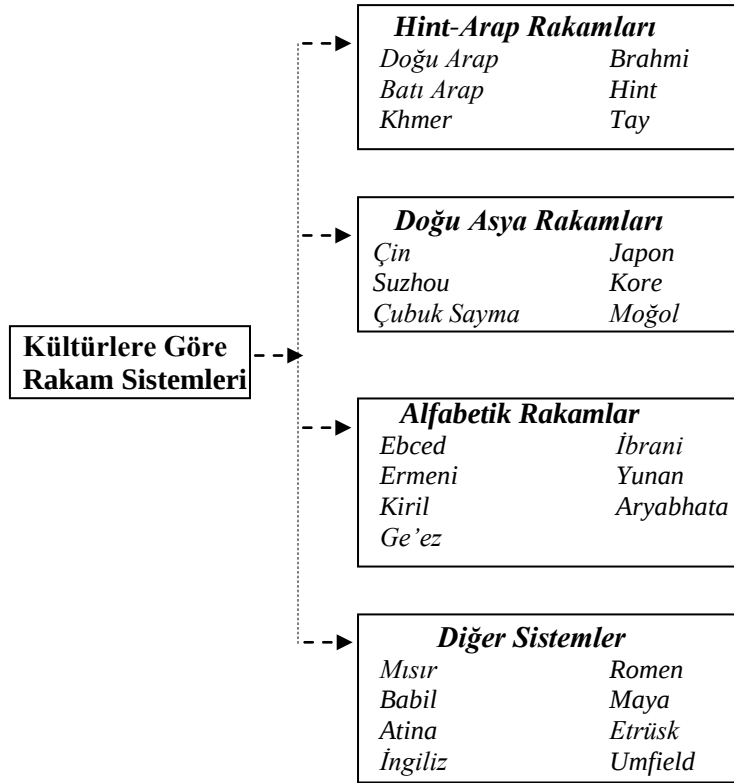
2. RAKAMLAR VE SAYILAR

Nümerik analizde ya da diğer adıyla sayısal çözümlemede her zaman bir anlamı olan en temel birim sayılardır. Sayılar; belli *kantitatif* büyüklükleri ifade etmek için kullanılan kesin ve aynı zamanda özel anlam ve değerleri olan miktar bildiren ifadelerdirler. Bunlar, insan hayatında olayları kesin bir dille yani ikinci bir anlama meydan vermeden, diğer bir ifade ile hiçbir şüphe ve belirsizliğe neden olmadan, tek anlamlı olarak ifade etmek için kullanıldıklarından, çok büyük önem taşımaktadırlar. Her zaman belli bir kural veya sistem içerisinde tanımlanırlar. Tanımlanmış oldukları her bir kural onun sayı sistemini oluşturur. Hatırlanacağı gibi, tarihte bu amaçla kullanılmış ilk sayı sistemi sayaç sistemidir. Bu sistemde bir sayı; sadece yan yana çizilmiş çizgilerle ifade edilmektedir. Daha sonraları geliştirilen, bu günde çeşitli şekillerde kullanılan sayı sistemleri yerel sistemler olarak isimlendirilmektedir. Bu sistemde sayılar, matematiğe dayalı ilimlerinde sadece ortak bir gösterim simgesi özelliği olan *rakamlardan*, rakamların yan yana yazılması ile oluşturulmaktadır. Sayıların büyüklük ya da miktar değerleri olmasına karşılık rakamların böyle bir özelliği yoktur. Sadece sayıları yazılı olarak ifade etmek için kullanılırlar.

2.1. Rakamlar ve Farklı Rakam Sistemleri

Rakamlar bir simge olup sayıları yazı ile ifade etmek için kullanılan gösterimlerdir. Bu nedenle, rakamların sadece sembol özellikleri bulunmaktadır. Ancak, rakamlar büyüklük ya da miktar özelliği taşıdıkları sürece bir sayı niteliğinde olurlar. Yani, rakamlar aynı zamanda bir sayı olabilir. Rakamların önünde negatif pozitif işareti bulunduğu, diğer bir ifade ile değer bildirdikleri sürece, her rakam bir sayı özelliğinde olur. Bu nedenle, çoğu zaman rakamlar sayı olarak da kullanılabilir. Ayrıca, bir veya birkaç rakamın belli kurala göre yan yana getirilmesinden oluşan rakamlar topluluğu da her zaman bir sayı olmaktadır. Bu gibi rakam toplulukları sürekli miktar bildireceklerinde sayı olmaktadır. Sayıları ifade etmek için eskiden beri çeşitli rakamlar kullanılmıştır. Bu rakamlar tarihin belli dönemlerinde belli kültür ve

medeniyetler tarafından değişik *simge* ya da *semboller* kullanılarak ifade edilmişlerdir. Bazı medeniyetlerde rakam olarak kullanılan simgeler aynı zamanda harf olarak da kullanılmıştır. Rakamların çeşitli kültürlerle göre bir tasnifi yapılırsa aşağıdaki Rakam sistemini oluşturmak mümkündür (*Diyagram 3*).



Diyagram 3: Farklı kültürlerle göre rakam sistemleri

Diyagram 1 'de sözü edilen ve her bir medeniyetin farklı şekillerde kullanmış olduğu rakam sistemlerinin incelenmesi sonucunda görülebileceği gibi, bazı kültürlerde kullanılan rakamlar alfabetik harflerden farklı simgeler olmasına rağmen, bazılarında doğrudan alfabetik simgelere verilen değerlerle ifade edilmektedirler. Rakamların, alfabetik simgelerden farklı sembollerle ifade edildiği kültür ve rakam gösterimlerine ilişkin bazı örnekler Tablo 1 'de özet bir biçimde ayrıca gösterilmektedir.

Tablo 1: *Bazı değişik kültürlerde kullanılmış rakamlar*

Batı Arap	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Batı Arap	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Doğu Arap	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	Khmerce	𑜀	𑜁	𑜂	𑜃	𑜄	𑜅	𑜆	𑜇	𑜈	𑜉
Bengalce	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	Lao	໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙
Çince (simple)	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	Limbu	𑜁𑜂𑜃𑜄	𑜁𑜂𑜃𑜅	𑜁𑜂𑜃𑜆	𑜁𑜂𑜃𑜇	𑜁𑜂𑜃𑜈	𑜁𑜂𑜃𑜉	𑜁𑜂𑜃𑜊	𑜁𑜂𑜃𑜋	𑜁𑜂𑜃𑜌	𑜁𑜂𑜃𑜍
Çince (complex)	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	Malayalam	൦	൧	൨	൩	൪	൫	൬	൭	൮	൯
Çince II (huā mā)	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	Mongolian	᠐	ᠠ	ᠡ	ᠢ	ᠣ	ᠤ	ᠥ	ᠦ	ᠨ	ᠬᠡ
Devanagari	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	Burmese	၀	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇	၈	၉
Ge'ez (Ethiopic)	፩	፪	፫	፬	፭	፮	፯	፰	፱	፲	Oriya	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
Gujarati	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯	Roman	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
Gurmukhi	੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯	Tamilce	௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯
Kannada	೦	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯	Telugu	౦	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
											Tayca	໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙
											Tibetçe	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩
											Urduca	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

Alfabetik simgelerin rakam olarak kullanıldığı kültürlerde ise her harfe bir sayı değeri tayin edilerek bunların sayıların yazılmasında rakam olarak kullanılması sağlanmıştır. Bu duruma örnek olarak; *Ermenice* ve *İbranicedeki....*vs. gösterim şekilleri verilebilir (Tablo 2 ve Tablo 3).

Tablo 2: *Ermeni rakamları*

Ermeni rakamları								
Ermeni	Çeviri	Arap	Ermeni	Çeviri	Arap	Ermeni	Çeviri	Arap
Ա	A	1	Խ	X (KH)	40	Չ	Ç' (CH)	700
Բ	B	2	Ծ	C ('tDZ)	50	Պ	P'	800
Գ	G	3	Կ	K'	60	Ջ	J'	900
Դ	D	4	Հ	H	70	Ռ	RR	1000
Ե	E / YE	5	Ձ	DZ	80	Ս	S	2000
Զ	Z	6	Ղ	GH	90	Վ	V	3000
Է	É	7	Ճ	Č ('TCH)	100	Տ	T'	4000
Ը	È (Θ/ə)	8	Ս	M	200	Ր	`R	5000
Թ	T'	9	ԅ	Y	300	Յ	C' (TS)	6000
Ժ	Ž	10	Ն	N	400	Ի	Y / I / V (H)	7000
Ի	I (Ē)	20	Շ	Š (SH)	500	Փ	P	8000
Լ	L	30	Ո	O / V	600	Ք	K	9000

Tablo 3: İbrani rakamları

İbrani Rakamları							
Simge	Harf adı	Ses değeri	Sayısal değeri	Simge	Harf adı	Ses değeri	Sayısal değeri
א	alef	- (1)	1	ל	lamed	l	30
ב	bet, vet	b, v	2	*מ ev מ	mem	m	40
ג	gimel	g	3	נ ev *ן	nun	n	50
ד	dalet	d	4	ס	samek	s	60
ה	he	h (2)	5	ע	ayin	- (5)	70
ו	vav	v	6	*ף ev פ	pe ve fe	p, f	80
ז	zayin	z	7	*ץ ev צ	sadi	ts (tz/z)	90
ח	kh	kh (ya da h) (3)	8	ק	kuf	k ya da q	100
ט	tet	t	9	ר	reş	r	200
י	yod	y (4)	10	ש	şin, sin	ş, s	300
כ ev *ך	kof ve kaf, haf	k, kh	20	ת	tof, thof	t	400

Ancak, burada genel yönüyle diğer rakam sistemlerinden biraz farklılık gösteren ve halen günümüzde çok olmamakla birlikte bazı özel amaçlar için kullanılan *Romen* rakamları Tablo 1’de sözü edilen gösterim şekline ilaveten büyük değerli bazı sayıların ifade edilmesi yönünden de farklılık göstermektedir (Tablo 4).

Tablo 4: Romen rakamları

Romen rakamları ve onluk sayı sistemdeki anlamları	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	XI	XII	XV	XVI	XIX	XX	XXV	XXX	XXXV	XL
	11	12	15	16	19	20	25	30	35	40
	L	LX	XC	C	CL	CC	CCXC	CD	D	M
	50	60	90	100	150	200	290	400	500	1000

Tablo 4 ‘den de görüleceği gibi bu farklılıklar, *Romen* rakamlarında sıfır gibi bir özel rakamın bulunmamasına karşılık, 1, 2,9, 10 kadar olan rakamlarla sayıların ifadesi için bunların doğrudan kullanılmış olması yeterli olmayıp bunun yanında bazı özel değerlerin; örneğin 50, 100, 500, 1000 gibi sayıları için de farklı yeni sembollerin rakam olarak kullanıldığı görülmektedir. Ancak, burada söylemek gerekirse; bu rakamlarla yazılacak sayılar oldukça karmaşık olduklarından, bunlarla hesap yapmak oldukça zor bir işlem olmaktadır. Bu nedenle, bunların yerine günümüzde daha sade ve basit gösterim olan *Avrupa’da Arap rakamları* diye tanınan {0 1 2 3 4 5 6 7 8 9} sembol ya da simgelerinden oluşan rakamlar kullanılarak sayılar bunlarla yazılmaktadır. Bu rakamlar ilk defa *Hint matematikçiler* tarafından tanımlanmış

olduklarından *Hint kaynaklı* rakamlar olmaktadır. Ancak daha sonraları, bu rakamlar kuzey *Afrikanlı Araplar* tarafından yeniden düzenlenerek orta çağda yani; 12. yüzyılda Arap medeniyeti sayesinde kuzey Afrika yolu ile Avrupa kıtasına geçerek yayılmıştır. Böylece, *Avrupalıların* sömürgecilik faaliyetleri sonrası yıllarda dünyada yaygın olarak kullanılır hale gelmişlerdir. Halen günümüzde bu rakamları en çok kullanılır olmakta ve her sistemdeki sayılar bu rakamlarla yazılarak ifade edilmektedir. Ancak burada tekrar vurgulamak gerekirse, bu rakamlar hiçbir zaman *Doğu Arap Rakamları* ile karıştırılmaması gerektirir. Sonuçta bu rakamlar farklı rakamlardır(Tablo 1).

2.2. Sayılar ve Sayı Sistemleri

Hatırlanacağı gibi *sayı* bir çokluğu ifade etmek için kullanılan soyut birimdir. Pratikte, her bir birim sergiledikleri temel özellikler bakımından bazı farklılıklar gösterirler. Bu gibi farklılar dikkate alınarak her birinin ortak özellikleri bir arada düşünüldüğünde sayılar farklı gruplar altında ele alınabilirler. Bu gruplar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

Tablo 5 : *Bazı sayı türleri*

Adı	Kümesi	Açıklamalar
Sayma sayıları	$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$	Bu sayılar sıfır hariç tüm pozitif tam sayılardan oluşmaktadır
Tek sayılar	$N = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, \dots\}$	2 ile kalansız bölünemeyen sayılara tek sayı denir.
Çift sayılar	$N = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$	2 ile tam bölünebilen sayılara çift sayı denir.
Pozitif tam sayılar	$N = \{1, 2, 3, \dots, 15, 27, \dots\}$	Sıfır hariç tüm pozitif değerli sayma sayılarından oluşur.
Pozitif sayılar	$A = \{+1, +2, +23, \dots, +0.7, +2/7, \dots\}$	İşaretçe pozitif değerli olan bütün sayılar
Negatif tam sayılar	$N = \{\dots, -9, -5, \dots, -3, -2, -1\}$	İşaretçe negatif değerli olan bütün tam sayılar
Negatif sayılar	$A = \{-10, -12, -3, \dots, -0.7, -2/7, \dots\}$	İşaretçe negatif değerli olan bütün sayılar
Tam sayılar	$N = \{-\dots, -5, -1, 1, 2, 7, \dots\}$	Negatif ve pozitif değerli bütün tam sayılar
Kesirli sayılar	$A = \{-\dots, -5/3, -1/2, 1/2, 2/3, 7/3, \dots\}$	İşaretçe negatif ve pozitif değerli olan bütün kesirli sayılar
Rasyonel Sayılar	Bu sayılar $A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in N \wedge b \neq 0 \right\}$ şeklinde iki	Tam sayıların bir

(oranlı sayılar)	tamsayının oranı biçiminde elde edilebilen sayılar olmaktadır $A = \{-\dots, -5, -1, 1/3, 3/2, 7, \dots\}$	genişlemesi olmaktadır.
Irrasyonel sayılar	Bu tür sayılar, rasyonel sayılar kümesine dahil edilemeyen sayılar olmaktadır. $A = \{\sqrt[5]{9}/8, \sqrt{2}, \pi, e\}$	Bunlar kesir olarak ifade edilemeyen, sonsuza kadar değerler alırlar. Devrik kesirli sayılar olmaktadır.
Reel (Gerçek) sayılar	$A = \{1/8, 1/4, \sqrt{3}, 3\}$	Bu sayılar; rasyonel sayıların standart metriğe göre bütünlenmesiyle elde edilirler.
Sanal sayılar	Bu sayılar; $z = a + bi$ biçiminde ifade edilebilen karmaşık sayıların sanal kısmı olan ikinci terimi için kullanılan $\{i = \sqrt{-1}\}$ değerli sayılardır.	Bu sayılar daima sanal değerlidir. Değeri $i = \sqrt{-1}$ dir.
Komp-leks sayılar	Reel ve sanal sayı terimlerinin $z = \{a \pm bi\}$ birlikte kullanıldığı karmaşık sayılardır. örnek $3 \pm 2i$	Bunlar kompleks sayılar olarak da bilinir.
Mutlak sayılar	$\{M = a \}$ örnek $ +2 = 2, -3 = 3$	Bir sayının sıfıra olan uzaklığı olarak da tanımlanabilir.
Asal sayılar	Bunlar sadece kendisine ve 1 sayısına bölünebilen 1'den büyük pozitif tam sayılar biçiminde de tanımlanabilir. $\{\dots, 2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$	Bunlar yalnız iki bölene olan doğal sayılardır.
Doğal sayılar	$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$	Bu sayılar sıfır dahil, sıfırdan başlayan tüm tam sayılardan oluşur.
Üslü sayılar	Bu sayılar $N = a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n$ biçimine ifade edilebilen sayılardır.	Bu sayı, bir doğal sayının kendisi ile $n \geq 2$ olmak üzere n kez çarpımının kısa gösterimidir.
Köklü sayılar	$n \geq 2$ ve $a \geq 1$ olmak üzere; $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ biçiminde ifade edilebilen sayılardır.	Bu sayılar tam sayı olabileceği gibi rasyonel sayılar da olabilir.
Transandant sayılar	Bu sayılar $\pi, e, e^\pi, 2^{\sqrt{2}}, \log 2$ gibi sayılarından oluşmaktadır.	Bu sayılar 1851 yılında Fransız matematikçisi Liouville tarafından kullanılmıştır.

Bunların haricinde, pratikte bazı uygulamalar için sıkça kullan veya ihtiyaç duyulan *çok büyü ve küçük sayıların* gösterimidir. Çok büyük ya da küçük sayılar için bu amaçlı kullanılmakta olan üslü gösterim şekilleri açık bir ifade ile

$$N=2500000=25 \times 10^5 = 2.5 + E6 \quad ; \quad A=0.00035=35 \times 10^{-5} = 3.5 - E4$$

biçiminde verilebilir.

2.2.1. B-Tabanlı Sayı Sistemleri

Bütün sayılar belli bir kural ya da tabana göre ifade edilirler. Bu taban sayının yazıldığı sayı sistemindeki rakam adetini gösterir. Genel anlamda bir S sayısının; B tabanı (*kullanılan rakam adeti=Sayı sistemi*) ve T_i 'ler de sayının tam kısmındaki rakamları, K_j 'ler ise kesirli kısmındaki rakamları göstermek üzere genel ifadesi; tamsayı olması halinde;

$$S_B = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0$$

ve ya kesirli sayı olması halinde de;

$$S_B = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0 , K_1 K_2 \dots K_{m-1} K_m$$

şeklinde gösterilebilir. Aynı sayıların taban değeri de kullanılarak daha kısa gösterimle; toplam biçimindeki ifadesi için,

$$S_B = \sum_{i=0}^n T_i B^i$$

ve kesirli sayı için de,

$$S_B = \sum_{i=0}^n T_i B^i + \sum_{j=1}^m K_j B^{-j}$$

toplam biçimindeki bir diğer şekildeki kısa ifadeleri de kullanılabilir. Bu ifadeler; terimlere açılmış, açık şekilleri veya seri biçimindeki gösterimleri kullanılırsa, tam sayılar için,

$$S_B = \sum_{i=0}^n T_i B^i = T_n B^n + T_{n-1} B^{n-1} + \dots + T_2 B^1 + T_1 B^0$$

ve kesirli sayılar için de,

$$S_B = \sum_{i=0}^n T_i B^i + \sum_{j=1}^m K_j B^{-j} = T_n B^n + T_{n-1} B^{n-1} + \dots + T_2 B^1 + T_1 B^0 + K_1 B^{-1} + K_2 B^{-2} + \dots + K_m B^{-m}$$

şeklindeki gösterimler de kullanılabilir. Burada;

$$0 \leq T_i , K_j \leq B-1; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

özelliklerine sahip değerler olmaktadır. Sonuçta, buradan B tabanlı sayıların ortak özellikleri;

En küçük rakam : 0

En büyük rakam : $B-1$

Rakam sayısı : B

k. basamağa yazılacak en büyük sayı : $B^k - 1$

k. basamağa yazılacak değişik sayı adeti : B^k

şeklinde sıralanabilir.

2.2.1.1. On Tabanlı (Decimal) Sayı Sistemi

On tabanlı sayı sistemi günümüzde en yaygın kullanılan bir sayı sistemidir. Bu sistemde kullanılan rakamların sayısı 10 tanedir. Bunlar; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şeklindeki simgelerden oluşan rakamlardır. Bu sistemde bir sayının yazılışı ve değeri; yukarıda verilmiş olan genel gösteriminde $B=10$ alınarak, tam sayı için,

$$S_{10} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0$$

kesirli sayı için,

$$S_{10} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0 , K_1 K_2 \dots K_{m-1} K_m$$

olarak verilebilir. Benzer şekilde, taban değeri kullanılarak bir diğer şekildeki ifadeleri, *tamsayılar için*,

$$S_{10} = \sum_{i=0}^n T_i 10^i = T_n 10^n + T_{n-1} 10^{n-1} + \dots + T_2 10^2 + T_1 10^1 + T_0 10^0$$

ve kesirli sayılar için de

$$S_{10} = \sum_{i=0}^n T_i 10^i + \sum_{j=1}^m K_j 10^{-j} = T_n 10^n + T_{n-1} 10^{n-1} + \dots + T_2 10^2 + T_1 10^1 + T_0 10^0 + K_1 10^{-1} + K_2 10^{-2} + \dots + K_m 10^{-m}$$

biçiminde olur. Burada;

$$0 \leq T_i , K_j \leq 10-1; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

özelliklerine sahip değerlerdir. Sonuçta, benzer şekilde $B=10$ tabanlı sayıların ortak özellikleri;

En küçük rakam : 0

En büyük rakam : 9

Rakam sayısı : 10

k. basamağa yazılacak en büyük sayı : $10^k - 1$

k. basamağa yazılacak değişik sayı adeti : 10^k

olarak sıralanabilir. Sonuçta; konuya ilişkin sayısal birer örnek olarak, tam sayı için,

$$7842_{10} = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

ve kesirli sayı için de,

$$1234617_{10} = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$$

ifadeleri verilebilir.

Ancak, günümüzde, on tabanlı sayı sistemi ile ilgili olarak böyle gösterimler yerine; alışıla gelen ve daha sade bir gösterim şekli olan, tam sayılar için 7842 ve kesirli sayılar için de; 123456,17 şeklindeki gösterim şekli, sayının tabanını belirtmeden herkes tarafından ortaklaşa kullanılır. Alışıla gelen bir alışkanlık olarak da bu sayıların $B=10$ tabanlı sayı sisteminde oldukları, (hiç kimsenin taban konusunu düşünmeden) bütün sayıların on tabanlı sayı sisteminde olduklarını kabullenmiş olurlar. Aksi durumlarda, alışıla gelen kural dışı olarak özel amaçlar için kullanılan diğer sayıların hangi sayı sisteminde oldukları taban gösteri ile belirtilir.

2.2.1.2. İki Tabanlı (Binary) Sayı Sistemi

İki tabanlı, diğer adıyla *Binary sayı* sisteminde kullanılan sayı tabanı $B=2$ dır. Buna paralel olarak da kullanılan rakamlar $\{0, 1\}$ gibi iki farklı sembolden ibarettir. Sonuçta bu sayı sisteminde bir sayının değeri, on tabanlı sayı sistemine benzer şekilde, genel gösterimdeki ifadelerde $B=2$ alınarak tamsayılar için,

$$S_2 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0$$

kesirli sayı için de

$$S_2 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 \dots K_{m-1} K_m$$

olarak yazılabilir. Aynı sayıların taban değeri kullanılarak diğer şekildeki ifadeleri, tamsayılar için

$$S_2 = \sum_{i=0}^n T_i 2^i = T_n 2^n + T_{n-1} 2^{n-1} + \dots + T_2 2^2 + T_1 2^1 + T_0 2^0$$

ve kesirli sayılar için de

$$S_2 = \sum_{i=0}^n T_i 2^i + \sum_{j=1}^m K_j 2^{-j} = T_n 2^n + T_{n-1} 2^{n-1} + \dots + T_2 2^2 + T_1 2^1 + T_0 2^0 + K_1 2^{-1} + K_2 2^{-2} + \dots + K_m 2^{-m}$$

biçiminde olur. Burada;

$$0 \leq T_i, K_j \leq 2-1; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

özelliklerine sahip değerlerdir. Sonuçta, benzer şekilde $B=2$ tabanlı sayıların ortak özellikleri;

En küçük rakam : 0

En büyük rakam : 1

Rakam sayısı : 2

k. basamağa yazılacak en büyük sayı : $2^k - 1$

k. basamağa yazılacak değişik sayı adeti : 2^k

olarak sıralanabilir.

Bu durumlara ilişkin sayısal bir örnek olarak tam sayı için, 10110_2 ve kesirli sayı için de, $10010,011_2$ sayıları verilebilir.

2.2.1.3. İki Tabanlı Bir Sayının On Tabanlı Bir Sayıya Dönüştürülmesi

İki tabanlı bir tam sayının veya kesirli bir sayının on tabanlı sayıya dönüştürülmesinde izlenmesi gereken işlem yolu aşağıda verilen iki örnekle açıklandığı gibi gerçekleştirilebilir.

2.2.1.3.1. İki Tabanlı Bir Tam Sayının On Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Pratikte, $101001_2 = (?)_{10}$ biçimdeki problemde olduğu gibi iki tabanlı bir sayının on tabanlı bir sayıya dönüştürülmesinde izlenecek işlem yolu; bu sayının öncelikle $B=2$ taban değerine göre açık bir şekilde ifade edilmesi ile başlanılır. İki tabanlı sayılar için böyle bir ifade,

$$101001_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

şeklinde olur. Daha sonra, bu ifadenin bütün terimleri teker teker hesaplanarak her bir terimin onluk sistemdeki karşılık değerleri

$$101001_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32_{10} + 8_{10} + 1_{10}$$

olarak elde edilir.

Sonuçta bu değerlerin toplanmasından da onluk sayı sistemindeki karşılığı, $101001_2 = 32 + 8 + 1 = 41_{10} = 41$ olarak hesaplanmış olur. Böylece, iki tabanlı 101001_2 sayının on tabanlı sayı sistemindeki karşılık değeri; 41 olarak elde edilmiş olur.

2.2.1.3.2. İki Tabanlı Kesirli Bir Sayının On tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Benzer bir örnek problem de $101001,011_2 = (?)_{10}$ gibi iki tabanlı bir kesirli sayının on tabanlı sayı sistemindeki karşılık değerinin ne olduğunun hesaplanması şeklinde verilebilir. Böyle bir problemin çözümünde bir önceki paragraf 2.2.1.3.1 verilmiş olan örnek problem çözümüne benzer şekilde hareket edilerek aşağıda çözümü gerçekleştirilmiş olan $101001,011_2 = (?)_{10}$ örnek probleminin çözümü gibi açıklanabilir. Konuya bir örnek: $101001,011_2 = (?)_{10}$ iki tabanlı bir sayının on tabanlı sayı olarak karşılığının hesaplanmasında önce bu sayı taban değerine göre açık bir şekilde;

$$101001,011_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

olarak ifade edilir. Sonra, her terimin onluk sayı sistemindeki karşılıkları

$$101001,011_2 = 41_{10} + 0,25_{10} + 0,125_{10} = 41,375_{10} = 41,375$$

hesaplanarak bunlar toplanır.

Sonuçta, bu şekilde yapılmış hesaplamalar neticesinde $101001,011_2$ iki tabanlı bir sayının on tabanlı sayı sistemindeki karşılık değeri; $41,375$ olarak elde edilmiş olur.

2.2.1.4. On Tabanlı Bir Sayının İki Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

On tabanlı sayı sistemi ile iki tabanlı sayı sistemi arasındaki dönüşüm; gerek tam sayılar ve gerekse kesirli sayılar için paragraf 2.2.1.3 de anlatılmış olan işlemlerin tersi bir işlem yolu dizisi takip edilerek, amaca uygun dönüşüm aşağıda verilen örneklerde açıklanacağı gibi gerçekleştirilebilir.

2.2.1.4.1. On tabanlı Bir Tam Sayının İki Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

$41_{10} = (?)_2$ gibi bir problemde, böyle bir işlemin gerçekleştirilebilmesi için on tabanında verilen sayı sürekli *Binary* sayı sisteminin tabanı olan ikiye bölünerek her bölme işleminde elde edilen kalan değerleri sayı yazmanın tersi sırada sağdan sola doğru sırada yan yana yazılarak bu sayının iki tabanlı sayı sistemindeki karşılığı elde edilmiş olur. Bu dönüşüme bir örnek; $41_{10} = (?)_2$ probleminin çözümü verilebilir.

Sayı	Kalan
41	1
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1

İşlem sırası

$41_{10} = 101001_2$

Böyle bir çözüm için $B=10$ tabanında yazılmış olan sayı her seferinde ifade edilmek ya da dönüştürülmek istene $B=2$ tabanlı sayı sisteminin taban değerine ardışık bir şekilde bölünerek kalan değerleri elde edilir. Sonra bu kalan değerleri bölme işleminde takip edilen işlem adımları sırasının tersi yönde, sonundan başına doğru soldan sağa yan yana yazılarak $41_{10} = (?)_2$ sorusu için çözüm olan

iki tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $41_{10} = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2$ olarak elde edilmiş olur.

2.2.1.4.2. On Tabanlı Kesirli Bir Sayının İki Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Burada paragraf 2.2.1.4.1 de tam sayı dönüşümü için anlatılanlar kesirli sayılar için genişletilerek konu, $41,375_{10} = (\dots)_2$ şeklindeki on tabanlı kesirli sayıların iki tabanlı sayı sistemindeki karşılıklarının hesaplanması biçimine dönüşmüş olur. Böyle bir problemin çözümünün gerçekleştirilebilmesi için; on tabanlı sayı önce tam ve kesirli kısımları biçiminde iki ayrı parça halinde düşünülür. Bu duruma bir örnek olarak; $41,375_{10}$ gibi kesirli bir sayının birinci parçası olan 41 tam sayı kısmı, bir önceki paragraf 2.2.1.3 de olduğu gibi $41_{10} = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2$ olarak iki tabanlı sayıya dönüştürülür. Daha sonra, kesirli kısmındaki $0,375_{10}$ sayısı da sürekli *Binary* sayı sisteminin tabanı olan $B=2$ sayısı ile çarpılarak, her çarpım sonucunda elde edilecek sayının tam kısmı (0 ya da 1 sayılarından olur) on tabanlı sayının tam sayı kısmının dönüştürülmesinden elde edilmiş iki tabanlı $41_{10} = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1_2$ sayısının sağına (ya da sonuna) virgülden sonra sırası ile yazılır. Bu işleme sonuç sıfır oluncaya kadar devam edilir. Sonuç, sıfır olduğunda arzulanan dönüşüm gerçekleştirilmiş olmaktadır.

Konun daha kolay anlaşılır olması amacıyla böyle bir problem aşağıda çözümü verilmiş olan $41,375_{10} = (?)_2$ kesirli sayısının iki tabanlı sayıya dönüştürülmesi işlemi yardımıyla tekrar özetlenmektedir. Pratikte böyle bir dönüşüm işlemi, sırası ile

Sayı	Kalan	$0,375_{10}$ Dönüşümü	Tam kısmı
41	1	$0,375 \cdot 2 = 0,750$	0
20	0	$0,750 \cdot 2 = 1,50$	1
10	0	$0,50 \cdot 2 = 1,00$	1
5	1		
2	0		
1	1		

Bu rakamlar tersi sıra yazılarak tam kısım için

$41,375_{10} = 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1,0\ 1\ 1_2$

işlem adımları izlenerek gerçekleştirilir.

ikte, bu gibi işlemlerin yapılması neticesinde, on tabanlı $41,375_{10}$ sayısının iki tabanlı sayı sistemindeki karşılık değeri $101001,011_2$ biçiminde hesaplanmış olur.

Sonuçta tekrar özetlemek gerekirse; on tabanlı sayı sistemindeki bir sayının iki tabanlı sayı sistemine dönüştürülmesinde; on tabanlı sayının tam kısmındaki sayı önce sürekli ikiye bölünerek elde edilen kalanların tersi sırada yan yana yazılarak iki tabanlı sayının tam kısmı, on tabanlı sayının ondalık kısmı iki ile çarpılarak her çarpma işlemi sonucunda elde edilen sayıların tam kısmındaki sayılar işlem sırasının yönünde yazılarak kesirli kısmı (*bu çarpım işlemi sonucun 0,00 oluncaya kadar devam edilir*) bulunarak tam ve kesirli kısımlardan oluşan iki tabanlı sayı elde edilir.

2.2.1.5. İki Tabanlı Sayı Sisteminde Dört İşlem

İki tabanlı sayı sisteminde dört işlem aynen 10 tabanlı sayı sisteminde olduğu gibi yapılır. Ancak, bu sistemde bütün sayılar iki adet; 0, 1 gibi iki farklı rakamla yazıldığından ve bir basmaktaki en büyük sayı 1 olduğundan her işlem için aşağıda belirtilen kurallar geçerlidir.

2.2.1.5.1. Toplama İşlemi

İki tabanlı sayı sisteminde bir toplama işleminin yapılabilmesi için;

$$\begin{array}{ll} 1+1 = 0 & (\text{elde var } 1) \\ 1+0 = 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 0+1 = 1 \\ 0+0 = 0 \end{array}$$

toplama kurallarından faydalanılır. Buna göre; aşağıdaki örnekten de görüldüğü gibi iki sayının toplamı;

$$\begin{array}{rcl} & \text{İki tabanlı sayı} & \text{on tabanlı sayı} \\ & 111_2 & 7_{10} \\ & 110_2 & 6_{10} \\ \hline \text{Toplamı} & 1101_2 & 13_{10} \text{ (kontrol)} \end{array}$$

şeklinde yapılmaktadır.

2.2.1.5.2. Çıkarma İşlemi

Benzer şekilde, iki tabanlı sayılara ilişkin çıkarma işleminde kurallar

$$\begin{array}{ll} 1-1 = 0 & 1-0 = 1 \\ 0-0 = 0 & 0-1 = 1 \text{ (soldan 1 ödünç al)} \end{array}$$

şeklinde verilebilir. Buna göre; aşağıdaki örnekten de görüldüğü gibi iki tabanlı sayının farkı;

$$\begin{array}{rcl} \text{İki tabanlı sayı} & & \text{On tabanlı sayı} \\ 1100_2 & & 12_{10} \\ \underline{101_2} & & \underline{5_{10}} \\ \text{Fark} \quad 111_2 & & 7_{10} \text{ (kontrol)} \end{array}$$

olarak bulunabilir. Çıkarma işlemine bir başka örnek ise;

$$\begin{array}{rcl} \text{İki tabanlı sayı} & & \text{On tabanlı sayı} \\ 10101_2 & & 21_{10} \\ \underline{110_2} & & \underline{6_{10}} \\ \text{Fark} \quad 1111_2 & & 15_{10} \text{ (kontrol)} \end{array}$$

şeklinde verilebilir.

2.2.1.5.3. Çarpma İşlemi

Matematikte toplama işlemin kısa şekli olarak tanımlanan çarpma işlemi, günlük kullanılan onluk sisteminde olduğu gibi iki tabanlı sayı sisteminde de benzer şekilde yapılmaktadır. Ancak, iki tabanlı sayı sisteminde çarpma işlemini gerçekleştirebilmek için bu sistemin rakam özellikleri gereği, çarpımına işlemine ilişkin bazı kuralların dikkate alınmış olması gerekir. İki tabanlı sayı sistemi için bu gibi çarpma kuralları,

$$\begin{array}{l} 1*1 = 1 \quad ; \quad 0*0 = 0 \\ 1*0 = 0 \quad ; \quad 0*1 = 0 \end{array}$$

olarak verilebilir. Buna göre iki tabanlı sayı sisteminde bir çarpma işlemi;

<i>İki tabanlı sayı</i>	<i>On tabanlı sayı</i>
$\begin{array}{r} 111_2 \\ 101_2 \\ \hline 111 \\ 000 \\ 111 \\ \hline \text{Toplam} \quad 100011_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7_{10} \\ 5_{10} \\ \hline 35_{10} \text{ (kontrol)} \end{array}$

olarak yapılabilir.

2.2.1.5.4. Bölme İşlemi

Hatırlanacağı gibi matematikte çıkarma işleminin kısa ifadesi olan bölme işlemi, bir çıkarma işleminde bölen sayısının bölünen sayıdan sürekli çıkartılmasındaki gerçekleştirilen çıkarma işlemi sayısı olmaktadır. Aynı düşünce iki tabanlı sayıların bölmesinde de geçerliliğini korumaktadır. Buna göre; iki tabanlı sayı sisteminde bir bölme işleminin gerçekleştirilebilmesi için onluk sistemdeki benzer yollar izlenir. Ancak, burada onluk sistemde yapılan bölme işleminden farkı iki tabanlı sayı sisteminde rakamların 0, 1 gibi iki adet rakamdan oluşmuş olmasının dikkate alınması ile ilgilidir. Bu durum aşağıda gerek iki tabanlı gerekse on tabanlı sayı sistemindeki bölme işlemi örneklerinden de açıkça görülebilir.

<i>İki tabanlı sayı</i>	<i>on tabanlı sayı</i>
$\begin{array}{r l} 11 & 10 \\ 10 & 1,1 \\ \hline 010 & \\ 010 & \\ \hline \text{kalan} & 00 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 3 & 2 \\ 2 & 1,5 \\ \hline 10 & \\ 10 & \\ \hline \text{(kalan)} & 00 \end{array}$
(kalana sıfır ilave, bölüme virgül yaz) ← →	

2.2.1.5.5. Onaltı Tabanlı (Hexadecimal) Sayı Sistemi

Bu sayı sisteminde, diğer sayı sistemlerine benzer şekilde, taban özellikleri gereği, 16 (on altı) adet farklı sembol rakam olarak kullanılmaktadır. Bu rakamlar sırası ile,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

olarak gösterilirler. Buna göre on altı tabanlı sayı sistemindeki bir sayı; genel gösterimde $B=16$ alınarak tam sayı için,

$$S_{16} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0$$

kesirli sayı için de,

$$S_{16} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 \dots K_{m-1} K_m$$

biçiminde ifade edilebilir. Diğer sayı sistemlerindeki benzer şekilde, bu sayı sisteminde de $B=16$ taban değeri kullanılarak toplam şeklindeki ifadeleri; tamsayılar için,

$$S_{16} = \sum_{i=0}^n T_i 16^i = T_n 16^n + T_{n-1} 16^{n-1} + \dots + T_2 16^2 + T_1 16^1 + T_0 16^0$$

ve kesirli sayılar için de

$$S_{16} = \sum_{i=0}^n T_i 16^i + \sum_{j=1}^m K_j 16^{-j} = T_n 16^n + T_{n-1} 16^{n-1} + \dots + T_2 16^2 + T_1 16^1 + T_0 16^0 + K_1 16^{-1} + K_2 16^{-2} + \dots + K_m 16^{-m}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$0 \leq T_i, K_j \leq 16-1; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

özelliklerine sahip değerlerdir. Ayrıca, diğer tabanlı sayı sistemlerindeki benzer şekilde bu sayı sisteminde de sayı tabanı için $B=16$ değeri alınarak ortak özellikleri;

En küçük rakam : 0
En büyük rakam : 15

Rakam sayısı : 16

k. basamağa yazılacak en büyük sayı : $16^k - 1$

k. basamağa yazılacak değişik sayı adeti : 16^k

olarak sıralanabilir.

2.2.1.5.6. Onaltı Tabanlı Bir Sayının On Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Bu sayı sisteminde de daha önce diğer sayı sistemleri için anlatılmış olanlara benzer yollar izlenerek diğer sayı sistemleri ile arasındaki dönüşüm gerçekleştirilebilir. Bu duruma örnek olarak, Onaltı tabanlı sayı sisteminde; $A=10$ alınarak, $S_{16} = 3A_{16} = (..?.)_{10}$ tam sayısının ve $S_{16} = 3A_{16} = (..?.)_{10}$, kesirli bir sayının on tabanlı bir sayıya nasıl dönüştürüleceği problemi örnek verilebilir. Bu amaçla her bir sayı türü için gerçekleştirilecek çözümler aşağıdaki örneklerde gerekli işlemlerin yapılması neticesinden,

Tam sayılar için,

$$3A_{16} = 3 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 929_{10} = 929$$

ve kesirli sayılar için de

$$3A_{16} = 3 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} = 929,25_{10} = 929,25$$

olarak elde edilir.

2.2.1.5.7. On Tabanlı Bir Sayının Onaltı Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

On tabanlı bir sayının onaltı tabanlı sayıya dönüştürülmesinde; bir önceki konuda yapılan işlemlerin tersi yönde hareket edilerek, iki tabanlı sayılarda olduğu gibi, önce sayının tam kısmı *binary (iki tabanlı sayı)* sistemindeki işlemlerde kullanılan iki yerine on altıya bölünerek elde edilen kalan sayıların en son kalandan itibaren ters sırada ardı sıra yazılmaları ile tam kısmı, sonra kesirli kısmındaki sayı 16 ile çarpılarak elde edilen sayının tam kısımları aynı sırada tam sayının devamına virgülden sonra kesirli kısım biçiminde yazılarak istenen sayı karşılığı bulunur. Böyle bir dönüşümün daha açık örneği aşağıdaki uygulamalardan görülebilir.

a) Bir tam sayı dönüştürme örneği

Örnek: Tam sayılarla ilgili bu problemde $1246_{10} = (?)_{16}$ dönüştürümünün gerçekleştirilmesi istenmektedir. Böyle bir problemin çözümü için yukarıda söylenenlerden hareket edilerek, daha önce on tabanlı sayıların diğer farklı tabanlı sayılara dönüştürülmesinde söylenen ve izlenen yollara benzer şekilde hareket edilerek burada da

On tabanlı	Onaltı tabanlı
1246	14 $\rightarrow$ $\uparrow$ E
77	13 $\rightarrow$ $\uparrow$ D
4	Tersi sıra $\rightarrow$

16 bölme işlemleri yapılarak kalan değerlerden $B=16$ tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $1246_{10} = 4DE_{16}$ olarak hesaplanır.

b) Bir kesirli sayı dönüştürme örneği

Bu problemde on tabanında yazılmış $1246.32_{10} = (?)_{16}$ sayısının 16 tabanındaki değerinin hesaplanması istenmektedir. Böyle bir problemin çözümü için burada, önce yukarıdaki diğer tabanlı örneklerde izlendiği yollarda olduğu gibi sayının tam kısmı dönüştürülür. Daha sonra kesirli kısmı; ardı sıra on altılı sayı sisteminin tabanı olan 16 sayısı ile çarpılarak, her çarpım sonucundaki tam kısım;

Tam kısım	Kalan ondalıklı kısım
$0.32 \cdot 16 = 5.12$ çarpımın	5 alınır 0.12
$0.12 \cdot 16 = 1.92$	1 0.92
$0.92 \cdot 16 = 14.72$	14 $\rightarrow$ E 0.72

..... çarpma işlemlerine..... 0.00 oluncaya kadar devam edilir.

Burada, çarpma işlemi sonucunda elde edilen çarpım sonuçlarındaki tam kısımdan elde edilen 5, 1, 14.... sayıları aynı sırada virgülden sonra, on altılı sayı sisteminde $14=E$ gösterimi kullanılarak, $0,32 = 0,32_{10}$ değeri için on altılık sayı sistemindeki karşılığı olarak $0.51E_{16}$ sayısı elde edilir. Neticede

onluk sayı sisteminde 1246.32 olarak verilmiş olan ve onaltılık sayı sisteminde karşılığı istenen sayı yukarıdaki örnekte olduğu gibi dönüştürülme sonucunda elde edilmiş olan tam sayı kısmına bu değer ilave edilerek, bu sayının karşılığı olan $1246.32_{10} = 4DE.51E_{16}$ sayısı elde edilir.

2.2.1.5.8. Sekiz Tabanlı (Octal) Sayı Sistemi

Bu sayı sisteminde, taban $B=8$ olduğu için kullanılan rakam adeti 8 olur. Bunlar; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rakamlarından oluşur. Buna göre; sekiz tabanlı sayı sisteminde bir sayının gösterimi, $B=8$ alınarak tam sayı için,

$$S_8 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0$$

kesirli sayı için de,

$$S_8 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 \dots K_{m-1} K_m$$

biçiminde ifade edilebilir. Bunların toplam şeklindeki bir diğer ifadeleri; tamsayılar için

$$S_8 = \sum_{i=0}^n T_i 8^i = T_n 8^n + T_{n-1} 8^{n-1} + \dots + T_2 8^1 + T_1 8^0$$

ve kesirli sayılar için de,

$$S_8 = \sum_{i=0}^n T_i 8^i + \sum_{j=1}^m K_j 8^{-j} = T_n 8^n + T_{n-1} 8^{n-1} + \dots + T_2 8^1 + T_1 8^0 + K_1 8^{-1} + K_2 8^{-2} + \dots + K_m 8^{-m}$$

şeklinde olur. Burada;

$$0 \leq T_i, K_j \leq 8-1; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

özelliklerine sahip değerlerdir. Benzer şekilde $B=8$ alınarak ortak özellikleri;

En küçük rakam : 0

En büyük rakam : 7

Rakam sayısı : 8

k. basamağa yazılacak en büyük sayı : $8^k - 1$

k. basamağa yazılacak değişik sayı adeti : 8^k

olarak verilebilir.

2.2.1.5.9. Sekiz Tabanlı Bir Sayının On Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Böyle bir dönüşüm yukarıda yapılanların benzeri şeklinde yapılır. Durum bir örnekle ele alınırsa, $1206_8 = (?)_{10}$ tam sayısı ve $1206.25_8 = (?)_{10}$ kesirli sayısı için aşağıdaki gibi açıklanabilir. Bu amaçla, Her iki sayı daha önceki konularda benzer problemlerde gerçekleştirilen dönüşüm problemlerinde olduğu gibi açık ifadeleri tam sayı için,

$$1206_8 = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 646_{10} = 646$$

ve kesirli bir sayı için de,

$$\begin{aligned} 1206.25_8 &= 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 5 \cdot 8^{-2} \\ &= 646.328125_{10} = 646.328125 \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

Bu işlemlerin devamında da $B=8$ tabanlı gerek tam sayı gerekse kesirli sayı için olsun; herhangi biriyle ilgili her terimdeki sayı değeri ve daha sonra da bütün terimlerinin sayı değerlerinin toplamı hesaplanarak arzulanan dönüşüm tam sayı için $1206_8 = 646$ ve kesirli sayı için de $1206.25_8 = 646.328125$ olarak gerçekleştirilmiş olur.

2.2.1.5.10. On Tabanlı Bir Sayının Sekiz Tabanlı Sayıya Dönüştürülmesi

Böyle bir işlemin gerçekleştirilmesinde önceki konularda anlatıldığı gibi paragraf 2.2.1.5.9. 'da yapılan işlemlerin tersi işlem sırasında bir işlem yolu izlenir. Bunun amaçla, önce on tabanda verilmiş olan sayı, $B=8$ taban değerine ardı sıra bölünerek her seferinde kalan değerleri elde edilir. Daha sonra bu kalan değerleri, bölme işleminde izlenen işlem yolunun tersi yönde soldan sağa doğru yan yana yazılarak ondalıklı tam sayılar için sekiz tabanlı sayı sistemindeki karşılığı bulunmuş olur. On tabanlı dönüştürülecek sayı eğer kesirli sayı ise, tam sayı kısmı bu şekilde dönüştürüldükten sonra kesirli kısmı da ardı sıra $B=8$ taban değeri ile çarpılır. Her çarpım işlemi sonucunda elde edilen sayının tam sayı değeri kısmı alınarak çarpım işlemi yönünde soldan sağa doğru yan yana

yazılması ile sekiz tabanlı sayının kesirli kısmı elde edilmiş olur. Bu işleme çarpım sonucunda elde edilecek sayının sıfır olmasına kadar devam edilir. Konunun daha anlaşılır olması amacıyla her iki durumla ilgili örnek problemlerin çözümü aşağıda verilmiştir.

Örnek 1: Bu problemde, on tabanlı sayı sisteminde değeri $646_{10} = (?)_8$ olarak verilmiş olan bir tam sayının $B=8$ sekiz tabanlı sayı sistemindeki karşılığının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 1: Bu amaçla, yukarıda anlatılanlara göre gerçekleştirilecek çözümde, önce 646 sayısı dönüştürülmek istene sayı sisteminin taban değeri olan $B=8$ 'e ardı sıra bölünerek kalan değerleri,

<i>On tabanlı</i>	<i>Sekiz tabanlı</i>	
646	6	↑
80	0	⋮
10	2	⋮
1		⋮
		<i>Tersi sırada</i>

olarak elde edilir. Daha sonra bu kalan değerleri bölme işleminin tersi yönde alınarak soldan sağa doğru yan yana yazılması ile sekiz tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $646_{10} = 1206_8$ olarak hesaplanmış olur.

Örnek 2: On tabanlı sayı sisteminde değeri $646.328125_{10} = (?)_8$ olarak verilmiş olan bir tam sayının $B=8$ tabanlı sayı sistemindeki karşılığının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 2: Böyle bir problemin çözümü için yukarıda söylenenlere benzer bir mantıktan hareket edilerek, önce bu kesirli sayı için sayının tam kısmı yukarıdaki gibi dönüştürülür. Böyle bir dönüşüm neticesinde tam sayı kısmının sekiz tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $646_{10} = 1206_8$ olarak elde edilir. Daha sonra kesirli kısmı olan 0.328125 sayısının dönüşümü için aşağıda açıklandığı gibi,

		<i>Tam kısmı</i>	<i>Kalan ondalıklı kısım</i>
0.328125*8=2.625	<i>çarpımın</i>	2	<i>alınır</i> 0.625
0.62*8=5.000		5	0.000

ardı sıra çarpım işlemleri sonucunda elde edilen sayıların tam kısımları alınarak işlem sırasında yan yana yazılır. Böylece, sekiz tabanlı sayıya dönüştürülmek istene on tabanlı 646.328125_{10} sayısının kesirli kısmı olan 0.328125 sayısı sekiz tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $0,25_8$ olarak elde edilmiş olur. Daha sonra bu $0,25_8$ sayısı, 646.328125_{10} sayısının tam kısmının dönüştürülmesinden elde edilen $646_{10} = 1206_8$ sayısına ilave edilmesinden 646.328125_{10} on tabanlı sayının sekiz tabanlı sistemindeki karşılığı $646.328125_{10} = 1206.25_8$ olarak hesaplanmış olur.

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK PROBLEMLER

Örnek 1: Bu örnek işlemde; $(11001)_2 + (1010)_2 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_4$,iki tabanında verilmiş olan iki sayının on ve dört tabanındaki değerlerinin hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 1: Bu sorunun cevaplandırılabilmesi için, önce iki tabanında verilmiş olan sayı

$$\begin{array}{r} 11001 \\ + 1010 \\ \hline 100011 \end{array}$$

biçiminde toplanarak iki (*Binary*) sayı sistemindeki ($B=2$ tabanındaki) toplam değeri $(100011)_2$ olarak hesaplanır. Sonra bu sayı iki tabanına göre,

$$(100011)_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$$

biçiminde ifade edilerek her bir teriminin ve bu sayıya karşılık gelen onluk sayı sistemindeki değeri

$$(100011)_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 35_{10} = 35$$

olarak elde edilir. Daha sonra, $B=4$ dört tabanlı sayı sistemindeki karşılık değeri,

Tam sayı	Kalan değeri
35	3
8	0
2	2

Sondan itibaren

2 0 3 = 203_4

işlemleri neticesinde 203_4 olarak hesaplanır. Böylece, problemde sorulmakta olan soruların cevabı,

$$(11001)_2 + (1010)_2 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_4 = 100011_2 = 35_{10} = 203_4$$

olarak hesaplanmış olur.

Örnek 2: Bir diğer örnek işlemde; $(11001)_2(101)_2 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_4$, iki tabanında verilmiş iki sayının on ve dört tabanındaki değerlerinin hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 2: Böyle bir işlemin çözümünde iki tabanlı iki sayının hem çarpılması işlemi hem de başka bir tabandaki karşılığının hesaplanması işlemi birlikte uygulanmaktadır. Böyle bir çözüm için önce iki sayı tabanlı iki sayının çarpımı

$$\begin{array}{r}
 11001_2 \\
 101_2 \\
 \hline
 11001 \\
 00000 \\
 11001 \\
 \hline
 1111101_2
 \end{array}$$

biçiminde gerçekleştirilerek bu iki sayının çarpımı $(11001)_2(101)_2 = (1111101)_2$ olarak elde edilir. Sonra bu sayının on tabanlı sayı sistemindeki karşılığı, burada da Örnek 1 'de izlenen işlem yoluna benzer hareket edilerek,

$$(1111101)_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 125_{10} = 125$$

olarak hesaplanır. Daha sonra bu $125_{10} = (?)_4$ sayısının $B=4$ dört tabanındaki karşılığı,

Tam sayı	Kalan değeri
125	1
31	3
7	3
1	1

Sondan itibaren

1 3 3 1 = 1331_4

olarak elde edilir. Sonuçta, bu problemde sorulmakta olan soruların cevabı, $(11001)_2(101)_2 = 1111101_2 = 125_{10} = 1331_4$ şeklinde hesaplanmış olur.

Örnek 3: Bu problemde; $(10010011)_2 : (11)_2 + (111)_2 = (?)_2 = (?)_{10} = (?)_4$ işlemlerinin yapılarak sonuçların iki, on ve dört tabanlı sayı sistemlerinde hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 3: Böyle bir problemin çözümüne iki tabanlı iki sayının bölümünden başlanarak ilk iki terim için,

$$\begin{array}{r}
 10010011 \mid 11 \\
 \underline{11} \\
 0011 \\
 \underline{11} \\
 000011 \\
 \underline{11} \\
 00
 \end{array}$$

bölüm hanesinden $(10010011)_2 : (11)_2 = (110001)_2$ değeri elde edilir. Daha sonra bu değer üçüncü terimle toplanarak,

$$\begin{array}{r}
 110001 \\
 + 111 \\
 \hline
 111000
 \end{array}$$

toplanarak, $(10010011)_2 : (11)_2 + (111)_2 = (111000)_2$ olarak elde edilir. Buna göre de, işlemin iki tabanlı sayı sistemindeki $(111000)_2 = (?)_{10} = (?)_4$ sonuç değerinin on ve dört tabanlı sayı sistemindeki karşılık sayıları, daha önceki örneklerde yapılan işlemlere benzer şekilde bir yol izlenerek, on tabanlı sistem için,

$$(111000)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 = (56)_{10} = 56$$

ve

$$\begin{array}{r|l} 56 & 4 \\ \hline 4 & 14 \\ \hline 16 & 12 \\ \hline 16 & 02 \\ \hline 1. \text{ kalan} & 00 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline 2. \text{ kalan} & 02 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 3. \text{ kalan} & 3 \end{array}$$

Bölme işlemleri sonucunda kalan değerlerin soldan sağa doğru önce 3. kalan, sonra 2. kalanın daha sonrada 1. kalan sayıların yazılması ile dört tabanlı sayı sistemindeki karşılık değeri $(111000)_2 = (320)_4$ olarak elde edilmiş olur. Sonuçta, sorunun cevabı $(10010011)_2 : (11)_2 + (111)_2 = (111000)_2 = (56)_{10} = (320)_4$ olur.

Örnek 4: Konuyla ilgili bir diğer problem de $(10010011_2 : 11_2)(101_2) = (?)_2 = (?)_4$ olarak verilebilir.

Çözüm 4: Böyle bir problemin çözümü için daha önceki örneklerde olduğu gibi önce parantez içi halledilir. Bu amaçla yapılacak bölme işlemi neticesinde $(10010011_2 : 11_2) = (110001)_2$ değeri elde edilir. Daha sonra bu sonuçla üçüncü terim olan 101_2 sayısı çarpılarak, çarpma işlemi neticesinde

$$\begin{array}{r} 110001 \\ \times 101 \\ \hline 110001 \\ 000000 \\ + 110001 \\ \hline 11110101 \end{array}$$

çarpma işlemi neticesinde 11110101_2 değeri elde edilir. Böylece, problemde sorulmakta olan $(10010011_2 : 11_2)(101_2) = (11110101)_2$ iki tabanlı sayı sistemindeki

karşılığı hesaplanmış olur. Daha sonra, buradan dört tabanlı sayı sistemindeki karşılık değerini elde edebilmek için önce on tabanlı sayı sistemindeki karşılığı hesaplanır. Bu amaçla,

$$(11110101)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

yazılarak yapılan hesaplamalardan on tabanlı sayı sistemindeki karşılığı $(11110101)_2 = 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 245_{10} = 245$ elde edilerek bunun dört tabanlı sayıya dönüştürülmesinden $(10010011_2 : 11_2)(101_2) = (3311)_4$ sayısı bulunur.

ALİŞTIRMALAR

- Problem 1)** a) $49_{10} = (..?)_2$, $612_{10} = (..?)_2$, $128.24_{10} = (..?)_2$
b) $0.56_{10} = (..?)_2$, $2.48_{10} = (..?)_2$, $0.111_{10} = (..?)_2$
c) $(11001)_2 = (..?)_{10}$, $(11111)_2 = (..?)_{10}$, $(0.11)_2 = (..?)_{10}$
d) $(11.001)_2 = (..?)_{10}$, $(0.001)_2 = (..?)_{10}$, $(1.101)_2 = (..?)_{10}$
e) $(101001)_2(1101)_2 = (..?)_2 = (..?)_{10} = (..?)_8 = (..?)_4$
işlemleri hesaplanmak istenmektedir.

- Problem 2)** a) $(54)_8 = (..?)_{10}$, $(54.3)_8 = (..?)_{10}$, $(162)_8 = (..?)_{10}$
b) $(5A7)_{16} = (..?)_{10}$, $(5A7)_{16} = (..?)_8$, $(5A7)_{12} = (..?)_9$
d) $(1110110)_2 - (0100101)_2 = (..?)_2 = (..?)_{10} = (..?)_4$
e) $(11001)_2(1010)_2 = (..?)_2 = (..?)_{10} = (..?)_8 = (..?)_4$
işlemleri hesaplanmak istenmektedir.

- Problem 3)** a) $(45)_8 + (36)_8 = (..?)_{10}$, $(54.3)_8 + (45.3)_8 = (..?)_{10}$
b) $(45)_8 - (36)_8 = (..?)_{10}$, $(54.3)_8 - (45.3)_8 = (..?)_{10}$
c) $(162)_8 : (12)_8 = (..?)_2$, $(162)_8 : (12)_6 = (..?)_2$
d) $(5A7)_{16} + (163)_8 - (1001)_2 = (..?)_{10}$
e) $(5A7)_{16} + (1,63)_8 - (100,1)_2 = (..?)_{10}$,
f) $(11001)_2(1010)_2(26)_8 = (..?)_2 = (..?)_{10} = (..?)_8 = (..?)_4$
g) $(11001)_2(10,11)_2 = (..?)_2 = (..?)_{10} = (..?)_8 = (..?)_4$
işlemleri hesaplanmak istenmektedir.

2. BÖLÜM

HATALAR VE HATA ÖLÇÜTLERİ

3. SAYISAL ÇÖZÜMLEMEDE HATALAR VE HATA ÖLÇÜTLERİ

Sayısal çözümlemede bir algoritmanın çözümünden *output* bilgisi olarak elde edilen sonuç ya da çıktı değerlerinin kalitesi her birinin gerçeği ne derece temsil etmesi ile ölçülür. Bu gibi bilgilerde oluşabilecek hatalar; girdi bilgileri de dahil algoritmanın çözümünde uygulanan işlem adımlarının her birinde meydana gelecek çeşitli hataların bir birikimi neticesinde oluşurlar. Bu hatalar, hataya neden olan olayın bulunduğu birime göre *Diyagram 2* 'den de görüleceği gibi

- *Girdi (Input)* ünitesinde (*biriminde*) oluşan hatalar,
- İşlem Ünitesinde (*biriminde*) oluşan algoritma çözme hataları

şeklinde ele alınabilirler. Hata kuramında bu hata türlerinin her biri farklı nedenli olduğundan farklı özellikleri de sergilerler. *Output* ünitesinde çıktı bilgilerinin kalitesini gösteren bu tür hataların toplam etkisini temsil eden çıktı hatası; girdi (*Input*) ve bilgi işleme (*ya da algoritma çözme*) ünitelerinde oluşan bu tür hataların çözüm algoritmasına göre sonuç değerleri üzerindeki toplam etkisini göstermektedir. Hatırlanacağı gibi uygulamada bu durum, hataların yayılması kuralı olarak adlandırılır.

Sayısal çözümlemede veri hataları farklı şekillerde olabilir. Bunlardan biri; çözüm algoritmasında *input* bilgilerinin denemeler sonucunda elde edilmiş örnekleme yada gözlem değerleri olması halinde oluşacak hatalar, bir diğerinin de; bir işlem algoritmasında *input* verilerinin irrasyonel sayılardan ya da kesme ve yuvarlatma hatalarını içeren yuvarlatılmış sayılardan olması halidir. Bu hatalardan her biri, özellikleri gereği farklı şekillerde ele alınarak incelenebilirler.

3.1. Input Veri ya da Ölçü Hataları

Sayısal çözümlemede *input* veri hatası olarak ölçü hatalarının kullanılmış olduğu duruma, daha çok sayısal işlem algoritmalarında deneysel gözlem

değerlerinin ya da doğrudan ölçülerin veri olarak kullanıldığı durumlarda rastlamak mümkündür. Bu hatalar, daha çok ortamdan, aletten ve kişilerden kaynaklandıkları için bunlardan her biri bir deneysel sonucu veya veriyi farklı karakterde etkilerler. Bu nedenle, özellikleri gereği farklı şekillerde ele alınabilirler. Bu duruma uygun olarak girdi bilgisi olarak kullanılabilecek bu tür veri hataları

- 1) *Kaba hatalar,*
- 2) *Sistemik hatalar,*
- 3) *Düzensiz hatalar*

biçiminde başlıca üç grup altında ele alınabilirler. Bunlardan *sistemik hatalar*, karakterleri gereği kendi aralarında da;

- 2-a) *Sabit sistemik hatalar,*
- 2-b) *Tek taraflı sistemik hatalar,*
- 2-c) *Çift taraflı sistemik hatalar*

şeklinde üç gruba ayrılabilirler.

Kaba hatalar, deneysel verilerdeki büyük yanılgıları temsil etmektedir. Bunlar daha çok deneyi yapan kişiden veya aletlerdeki kalibrasyon bozukluklarından kaynaklanırlar. Kalibrasyonu tam bir aletin kullanılması halinde, bu hatalar; deney sayısını artırmakla ve verilerin karşılaştırılmaları neticesinde fark olunabilirler.

İkinci tür hatalar sistemik karakterlidir, bunlar daha çok, deneyde kullanılan aletlerden ve ortam koşullarından kaynaklanırlar. Sabit karakterli olanları, genellikle aletlerden kaynaklanmaktadır. Aletlerin uygun şekilde kullanılmaları ile, bir diğer deyişle, uygun deney yöntemleri kullanılarak giderilebilirler. Tek taraflı olan sistemik karakterli hatalar ise; değerce farklı ancak işaretçe sabit yönde sonuçları etkilerler. Genelde, kişi yada ortamdan kaynaklanırlar. Bunlar, hiçbir zaman tam giderilemezler, deney sayısını ve şeklini artırarak azaltabilirler. Çift taraflı sistemik hatalar, genelde ortamdan kaynaklanırlar. İşaretçe ve miktarca farklı olurlar. Hataya neden olan parametrenin bulunup etkileri hesaplandıktan sonra verilerden özel hesaplamalar yoluyla giderilebilirler.

Üçüncü tür hatalar, düzensiz hatalar olmaktadır. Bunlar, bunların nedenleri hiçbir zaman bilinemez. Tekrar sayısını artırmakla verilerden giderilemezler. İşaret ve değerce değişkendirler. Her zaman deneysel verilerde bulundukları

düşünülür. Değerce oldukça küçük hatalardır. Bunlar hakkında sadece iki özellik bilinmektedir. Bir deneyde, tekrar sayısı sonsuz gidince; işaretçe simetrik olurlar ve küçük miktarlı olanlarının sayısı büyük miktarlı olanlarından daima fazladır. Bu haliyle, istatistik normal dağılıma uyduklarından ancak matematik istatistik kurallara göre hata teorisi konuları içerisinde incelenebilirler. Sayısal çözümleme konuları içerisinde ele alınmazlar.

Sayısal çözümlemede *Input* veri hatası olarak sadece ölçü hataları kullanılmaz. Bazı durumlarda veriler irrasyonel yada başka bir algoritmanın çözümünden elde edilmiş sayılar olabilir. Bu durumda, her bir verideki hata çıktı bilgilerini olumsuz yönde etkileyerek onların da hatalı değerler olmasına neden olur. Sayısal çözümlemede bu tür sayıların da çözüm algoritmasında girdi verisi olarak kullanılmış olmasından çıktı ünitesinde oluşacak *output* hatalarının da incelenmesi diğer bir konu olduğu unutulmamalıdır.

3.2. İşlem Hataları

Sayısal çözümlemede çıktı bilgilerini her zaman olumsuz yönde etkileyen hatalara, daha önceki paragrafta sözü edildiği gibi sadece, irrasyonel sayıların veya gözlemlere dayalı ölçü değerlerinin kullanılmış olması halinde rastlanılmaz. Bazen de algoritmik işlemlerde kullanılan trigonometrik fonksiyonların sayısal değerlerinin hesaplanmasında yeterli terimlerin alınmamış olmasından veya işlemlerdeki *kondisyon* bozukluğunun neden olacağı hatalar biçiminde rastlamak mümkündür. Sayısal çözümlemede çoğu pratik amaçlar için bu tür hatalar, sayılar veya algoritmalarındaki yuvarlatma hatası (*Roundoff Error*) ya da kesme hatası (*Truncation Error*) olarak adlandırılır ve sayısal çözümlemenin konuları içinde ele alınması gereken ve sık karşılaşılan hata türlerinden biri olmaktadır. Ayrıca bu hatalar belli bir algoritmanın çözümü neticesinde elde edilen *output* verilerini doğrudan etkilediklerinden çoğu zaman sonuçların yanlış olmalarına bile sebep olabilirler. Bu nedenle, bu tür hatalar sayısal çözümlemede, input veri hatalarına oranla, üzerinde en çok durulması gereken konulardan biri olmaktadır. Bir problemin çözümünde bu tür hatalar denetim altında tutulduğu sürece, etkin sonuçlar elde edilebilir.

3.2.1. Kesme Hatası

Bilgisayarlarda işlemler yapılırken bazı kapalı fonksiyonlarla ifade edilen fonksiyonların (*Trigonometrik, Üssel fonksiyonlar ...vs.*) sayısal değerlerine

ihtiyaç duyulur. Bilgisayarlarda bu gibi fonksiyonların değerlerini kullanırken, bunların seri açılımından elde edilen; n adet teriminden belli sayıdaki terimlerinden hesaplanmış değerleri kullanılır. Örnek: $\sin x$ fonksiyonunun belli bir x değerine karşılık gelen değerini hesaplayabilmek için bu fonksiyon *Taylor serisine* açılır ve açılım neticesinde,

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

seri ifadesi elde edilir. İlgili hesaplamalarda $\sin x$ kapalı fonksiyonu yerine bu ifadenin seriye açılmış ifadesi olan $x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$ şeklindeki seri açılımının 7. dereceden terimine kadar olan terimleri kullanılarak, $\sin x$ değeri hesaplanır. Böyle bir hesaplamada arda kalan daha yüksek dereceden terimler dikkate alınmadığından,

$$\text{Kesme hatası} = \sin x - (x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!)$$

şeklinde bir kesme hatası oluşmaktadır.

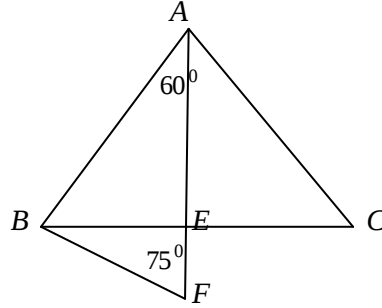
Bu şekilde; kapalı fonksiyonların belli bir değere karşılık gelen fonksiyon değerlerini, seriye açılmış ifadelerinde belli dereceden terimine kadar olan terimlerini dikkate alınarak, göz ardı edilen daha yüksek dereceden diğer terimlerinin dikkate alınmamış olmasının, fonksiyonun değeri üzerindeki olumsuz etkisi *kesme hatası* olarak adlandırılır. Bu hatanın değeri de işlem anında göz ardı edilen terimlerin değerlerinin toplamı kadar olur.

Örnek: Konuyla ilgili bir diğer örnek problem de $\alpha = 75^\circ$ derecelik bir açının $\tan \alpha$ trigonometrik fonksiyon değerinin

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$$

şeklindeki bir seri açılımı yardımıyla hesaplandığında yapılacak kesme hatasının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: Bu şekildeki bir problemin çözümünde yapılabilecek kesme hatasının değerini hesaplayabilmek için önce $\alpha = 75^\circ$ açının $\tan \alpha$ değerinin kesin olarak bilinmesi gerekir. Böyle bir durum aşağıdaki gibi çözülebilir.



Bu ABC eşkenar üçgeninde tüm iç açılar birbirine eşit ve 60^0 derecedir. Her köşe noktasındaki yükseklikleri aynı zamanda hem kenar, hem de açı ortayıdır. Bu özelliklerden faydalanarak, A noktasındaki AE yüksekliğini veya kenar ortayını aynı doğrultuda uzatarak $AB=AF$ olacak şekilde bu kenar ortayı üzerinde bir F noktası alınarak E noktasındaki açısı dik 90^0 açı olan bir BFE dik üçgeni oluşturulur. BFE dik üçgeninin F noktasındaki açısı, ABF bir ikizkenar üçgen olacağından $\alpha = 75^0$ kadardır. BE ve EF dik kenar uzunlukları da; ABC eşkenar üçgeninin kenar uzunlukları a ise, $BE = a/2$ ve $EF = a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ olur. BFE dik üçgeninde, F noktasındaki $\alpha = 75^0$ açısının $\tan \alpha$ yazılırsa; bunun kesin değeri,

$$\tan \alpha = \frac{BE}{EF} = \frac{a/2}{a(\frac{2-\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 3.732050807 \dots$$

olarak hesaplanır. Aynı açının yine $\tan \alpha$ değeri $\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$ formülünden $\alpha = 75^0$ derece değeri $\hat{\alpha} = 75^0 / \rho^0$ ve $\rho^0 = 180^0 / \pi = 57^0.29577951$ alınarak $\hat{\alpha} = 75^0 / \rho^0 = 1.308996939$ radyan birimine dönüştürülerek hesapladığında,

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} = 2.05664057 \dots$$

değeri elde edilir. Sonuçta, bu şekilde, farklı iki yoldan hesaplanan $\tan \alpha$ değerlerinin farkından, yapılacak kesme hatasının değeri,

$$\begin{aligned} \text{Kesme hatası} &= -(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \dots) - \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \\ &= 2.0566405 - 3.732050807 = -1.675410237 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3.2.2. Yuvarlatma Hatası

Çeşitli hesaplamalar sırasında, hesaplama işlemlerinin sonuçları istenilen sayıdaki rakamdan daha fazla olurlar. Böyle sayılardan istenilen basamaktaki yada sayıdaki rakamdan oluşan bir değeri almak için son haneleri yuvarlatılır. Bu yuvarlatma işlemi, istenen basmağın sağındaki rakamın 5 ile karşılaştırılması ile yapılır.

İstenen son rakam 5 'den küçükse dikkate alınmaz, atılır. Büyükse bir artırılır ve üst değeri alınır. Eşitse birlik olsun diye yuvarlatılan sayının son rakamı çift sayı olmasına dikkat edilir. Bu durumlar bir örnekle açıklanmak istenirse;

<i>Verilen sayı</i>	<i>Yuvarlatılan sayı</i>	<i>Karşılaştırma</i>	<i>Hatası</i>
54.763	54.76	3 <i>küçüktür</i> 5 <i>atılır</i>	- 0.003
54.766	54.77	6 <i>büyüktür</i> 5 1 <i>ilave edilir</i>	+0.004
54.765	54.76	5 <i>eşittir</i> 5 <i>atılır</i>	+0.005
54.7652	54.77	52 <i>büyüktür</i> 50 1 <i>ilave edilir</i>	+0.0048
54.7649	54.76	49 <i>küçüktür</i> 50 <i>atılır</i>	-0.0049

şeklinde yuvarlatmalar yapılarak belli basamağa kadar yuvarlatılmış sayıları elde edilir.

Benzer durum; aynı basamaklı iki sayının çarpma işlemi sonucunda hesaplanan sayının üç basamaklı olarak yuvarlatılması için düşünüldüğünde;

$$\begin{array}{r}
 0.236 * 10^1 \\
 0.127 * 10^1 \\
 \times \\
 \hline
 1652 \\
 472 \\
 236 \\
 \hline
 0.029972 * 10^2 \\
 0,5 \text{ yuvarlatma sınırı} \\
 0.300 * 10^1 \text{ cevap}
 \end{array}$$

olarak verilebilir. Burada $|Yuvarlatmahatas| = 0.28 * 10^{-2}$ kadar olmaktadır. Yuvarlatma hatası ile benzer düşünce; toplama ve çıkarma işlemlerinden elde edilen sonuçlar için de gösterilmek istenirse;

$$\begin{array}{r}
\text{Toplama İşlemi} \\
0.742 * 10^2 \\
0.927 * 10^2 \\
\hline
1.669 * 10^2 \\
\text{5 Yuvarlatma sınırı} \\
0.167 * 10^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\text{Çıkarma İşlemi} \\
0.314 * 10^1 \\
- 0.313 * 10^1 \\
\hline
0.001 * 10^1 = 0.100 * 10^{-1}
\end{array}$$

şeklinde açıklamaları yapılabilir.

Günümüzde, bu gibi el veya mekanik hesap makineleri ile yapılan hesaplamalar yerine daha çok gelişmiş teknolojinin ürünü olan bilgisayarlar kullanılmaktadır. Bilindiği gibi, bilgisayarlarda yazı yazılabilecek en küçük birim “Bite” olarak adlandırılır. Bir *Bite* ‘lik alana sadece bir rakam, ikili sayı sisteminde ya 0 yada 1 rakamları yazılabilir. Aynı şekilde, 8 *Bit*lik bir alan bir *Byte* olarak adlandırılır. Buna göre; bütün tam sayılar, bilgisayar belleğinde 2 *Byte* uzunluğundaki bir alanda; bu sayılarda üslü gösterim olmadığından, ilk *Bite* sayının işareti, geri kalan 15 *Bite* de sayının kendisi, 5 basamak güvenirlikle, $(2^{15} - 1) = \pm 32767$ aralığındaki değerleri alabilecek,

1. Byte								2. Byte							
±															

şekilde yazılır.

Benzer şekilde Gerçel sayılar; 4 *Byte* uzunluğundaki 32 *Bite* ‘lik bir alana; İlk *Byte* ‘in ilk *Bite* ‘ne üssün işareti ve geri kalan 7 *Bite* de sayı değeri, diğer 3 *Byte* ‘lik alanın ilk *Byte* ‘nin ilk *Bit* ‘ine sayının işareti geriye kalan *Bit*lere de sayının kendisi, 7 anlamlı basamakla;

1. Byte								2. Byte							
±	ü	s	t	e	l			±	s	a	y	ı	n	ı	n
3. Byte								4. Byte							
k	e	n	d	i	s	i	y	a	z	ı	l	a	c	a	k

yazılabilecek en büyük sayı $2^{23} - 1 = 838607$ değeri olacak şekilde yazılır.

Bunun gibi; çift duyarlıklı sayılar 8 *Byte* uzunluğunda 55 *Bit* üzerine, 16 basamak güvenle yazılabilecek en büyük sayı $2^{55} - 1 = 3.6028797 * 10^{16}$ olacak şekilde;

1. Byte								2. Byte							
±	ü	s	t	e	l			±	s	a	y	ı	n	i	n
3. Byte								4. Byte							
k	e	n	d	i	s	i	y	a	z	ı	l	a	c	a	k
5. Byte								6. Byte							
7. Byte								8. Byte							

yerleştirilebilirler. Bu sınırları aşan sayılar bilgi sayılara üstel biçimde yazılır ve işlemleri bunlarla gerekli yuvarlatmalar yapılarak sonuçlandırılır. Bilgisayarla işlemleri yaparken olabilecek bu tür hatalar yuvarlatma hatasıdır.

Konu daha iyi anlaşılabilmesi için benzer örnek; 2700 sayısı ile 0.02 sayısının, Bilgisayarlarda sayı depolama ve işlem yapma mantığı kullanılarak, tek(*single*) duyarlılıkla toplanması ile verilmek istenirse; bu sayılar önce üstel biçimde yazılması gerekir. Buna göre; $2700 = 0.2700 * 10^4$ ve 0.02 sayısı da $0.02 = 0.2 * 10^{-1}$ olur. Bu iki sayının bilgisayarlardaki gibi toplanabilmesi için üstel değerlerinin eşit olması gerekir. Üstel kısımları eşitlendiğinde; bu sayıların toplamı,

$$\begin{array}{r}
 2700000 = 0.2700 * 10^7 \\
 + \quad 0.02 = 0.2 * 10^{-1} = 0.000000002 * 10^7 \\
 \hline
 2700000,02 = 0.270002 * 10^7
 \end{array}$$

olarak hesaplanır.

Bu sayı tek duyarlılıkla hesaplandığından sonuçta güvenli basamak 7 adet olacağından, 2700000,02 değeri yuvarlatılarak 2700000 olarak elde edilir. Geriye kalan 0.02 değeri yuvarlatılarak atılır. Bu değer yuvarlatma hatası olur ve bundan sonra işlemler var ise bütün sonuçları belli bir oranda etkileyerek sonuçların yanlış olmasına neden olur.

3.3. Hata Ölçütleri ve Hata Yayılma Kuralı

Sayısal çözümlemede kullanılabilecek hata ölçütlerini, gerek *input bilgisi* olarak işlemlerde kullanılabilecek deneysel verilerde, gerekse işlemlerde oluşabilecek yuvarlatma ve kesme hatalarının tür ve özelliklerine göre farklı şekillerde tanımlamak mümkündür. Hata teorisinde; kesme ve yuvarlatma hataları için

mutlak hata ve bağıl hata ölçütleri kullanılırken, deneysel veri hataları için karesel ortalama hata (*ortalama hata*), mutlak hatalar ortalaması veya muhtemel hata gibi bazı ölçütler kullanılır.

3.3.1. Mutlak ve Bağıl Hatalar

Sayısal çözümlemede; daha önce sözü edildiği şekilde, sayıların gerek yuvarlatılması sonucunda, gerekse kesme işlemleri sonucunda oluşabilecek hataları;

A: Sayının hatasız değeri,

a : Yuvarlatma ve kesme işlemleri yapıldıktan sonra elde edilmiş değeri,

olmak üzere,

$$\varepsilon_{(a)} = A - a$$

şeklinde tanımlanabilir. Sayısal hesaplamalar için bu şekilde tanımlanan çok küçük miktarlı sonlu büyüklükteki toplam $\varepsilon_{(a)}$ hata değerleri; pozitif değerli olabileceği gibi negatif değerli de olabilirler. Ancak, her işlemde böyle bir hatanın alabileceği maksimum değeri işaretçe farklı olmasına karşılık mutlak değerce daima eşit olabilir. Hataların bu özelliğinden faydalananarak, $\varepsilon_{(a)} = |a - A|$ matematik olarak bu şekilde tanımlanan, *mutlak hata* değerlerinin alabilecekleri maksimum değer; $\Delta_{(a)} = \varepsilon_{(a)\max}$, bütün sayısal işlemler için bir hata ölçütü olarak kullanılabilir. Bu düşünceden faydalananarak, böyle bir ölçüt; bir sayının A hatasız değeri, a yuvarlatma ve kesme işlemleri yapıldıktan sonra elde edilen değerinden $\pm\Delta_{(a)}$ kadar farklı, $a - \Delta_{(a)} < A < a + \Delta_{(a)}$ sınırları arasında olacağı veya bunun bir başka şekilde ifadesi olarak, $-\Delta_{(a)} < A - a < \Delta_{(a)}$ olması gerektiği varsayımından hareketle, hatasız değerinin bu aralıkta olması gerektiği söylenebilir. Bu amaçla, sayısal çözümleme hesaplamaları için $\Delta_{(a)} = \varepsilon_{(a)\max}$ mutlak hata bir ölçüt olarak kullanılabilir.

Sayısal çözümlemede bazı durumlar için sadece aralık belirten böyle bir ölçüt yerine yalnız bir oransal sayı olan, *mutlak hatanın* kendi değerine bölünmesinden elde edilen,

$$\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|}$$

Bağıl (*izafi, oransal, göreceli*) hata değeri, daha uygun olacağı düşünülerek diğer bir hata ölçütü olarak kullanılır. Böylece; sayısal çözümlemede işlemlerin doğruluğunu denetlemek için kullanılabilecek duyarlık ölçütleri,

- *Mutlak Hata*
- *Bağıl (oransal, izafi) Hata*

gibi iki farklı hata kriteri olarak tanımlanmış olur. Bunlardan mutlak hata ölçütü birimli bir sayı olabilmesine rağmen, bağıl hata ölçütü her zaman birimsiz yada boyutsuz bir sayı olmaktadır.

Sayısal çözümleme hesaplamaları için bu şekilde tanımlanan hata ölçütleri, hatalı sayıların bir fonksiyonu şeklinde hesaplanan diğer değerler için de aynı şekilde kullanılabilir ölçütler olmaktadır. Ancak, böyle durumlarda algoritma çözümü biçiminde elde edilecek çıktı ürünlerinin hatası, hataların birikimi esasına göre geliştirilen hataların yayılması kuralı ile gerçekleştirilebilir. Nümerik analizde, algoritma çözümü konuları ile ilgili hataların yayılması kuralları aşağıdaki gibi ele alınıp açıklanabilir.

3.3.1.1. Aritmetik İşlemlerde Mutlak ve Bağıl Hataların Yayılması Kuralı

Hatırlanacağı gibi, aritmetikte sağladığı bazı pratik kolaylıklar yönünden işlemler toplama, çıkarma, çarpma ve bölme şeklinde dört adet oldukları söylenir. Ancak, çarpma toplamının, bölme çıkarmanın kısa ifadesi olduğu düşünülürse geriye temel aritmetik işlem olarak toplama ve çıkarma kalır. Bu durumda aritmetikte temel işlemler iki adet olur. Yine, aritmetikte *dekatik* tamlama işlemi dikkate alınır, *dekatik* tamlama sayesinde çıkarma toplama işlemine dönüşeceğinden aritmetik temel işlem dört değil sadece toplama olarak kabul edilip bir tane olduğu söylenebilir. *Dekatik tamlama* ile ilgili bir örnek, *dekatik* tamlama için *dekatik* toplam sonucundan atılacak değerlerin işlemin basamak adeti ile ilgili olup 10, 100, 1000, 10000, vs. değerler oldukları dikkate alınarak,

<i>Normal çıkarma işlemi</i> $\begin{array}{r} 4\ 2\ 6\ 3 \\ -\ 2\ 0\ 5\ 3 \\ \hline 2\ 2\ 1\ 0 \end{array}$	<i>Dekatik toplama işlemine göre çıkarma işlemi</i> $\begin{array}{r} 4\ 2\ 6\ 3 \\ +\ 7\ 9\ 4\ 7 \\ \hline 1\ 2\ 2\ 1\ 0 \end{array}$
	<i>(dekatik tamlama değeri)</i> <i>(dekatik tamlama toplamından 10000 atılır)</i>

olarak verilebilir.

Ancak ne var ki, durum böyle olmasına rağmen, burada yine de eskiden beri kabul edildiği gibi konular alışıla gelen bir düzen içerisinde ele alınarak aritmetik işlemlerin dört adet olduğu varsayımından hareket edilerek bütün aritmetik işlemlerde mutlak ve bağıl hataların yayılması ele alınmıştır.

3.3.1.1.1. Bir Toplamın Mutlak ve Bağıl Hatası

Hatasız, gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 , a_2 ve mutlak hataları da $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ olsun. Bu sayıların gerçek değerleri için $a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ve $a_2 - \Delta_{(a_2)} < A_2 < a_2 + \Delta_{(a_2)}$ yazılabilir. Buna göre bu iki sayının toplamı;

$$\begin{array}{r} a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)} \\ a_2 - \Delta_{(a_2)} < A_2 < a_2 + \Delta_{(a_2)} \\ \hline (a_1 + a_2) - (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)}) < A_1 + A_2 < (a_1 + a_2) + (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)}) \end{array}$$

olur.

Buradan, elde edilen toplam sonucunun mutlak hatası, $\Delta_{(a_1+a_2)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$ olarak yazılabilir. Sonuçta, durum genelleştirilirse;

$$\Delta_{(a_1+a_2+\dots+a_n)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots + \Delta_{(a_n)})$$

ifadesine göre; bir toplamın mutlak hatası, her bir sayının mutlak hatalarının toplamına eşittir. Bağıl hatanın tanımından, böyle bir toplamın bağıl hatası da

$$\delta_{(a_1+a_2+\dots+a_n)} = \frac{(\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots + \Delta_{(a_n)})}{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}$$

olur.

Örnek: $a_1 = 3.22$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.02$, $a_2 = 1.0148$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_2)} = 0.0002$ ve $a_3 = 9.6$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_3)} = 0.1$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların toplamı olan;

$$\begin{array}{rcl}
a_1 = 3.22 & & \Delta_{(a_1)} = 0.02 \\
a_2 = 1.0148 & & \Delta_{(a_2)} = 0.0002 \\
a_3 = 9.6 & & \Delta_{(a_3)} = 0.1 \\
+ & & + \\
\hline
a_1 + a_2 + a_3 = a = 13.8348 & & \Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \Delta_{(a_3)} = \Delta_{(a)} = 0.1202
\end{array}$$

$a = 13.8348$ değerinin mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.1202$ olmaktadır. Benzer şekilde toplamın bağıl hatası da

$$\delta_{(13.8348)} = \frac{0.1202}{13.8348} = 0.0217$$

olur.

3.3.1.1.2. Bir Farkın Mutlak ve Bağıl Hatası

Benzer şekilde, hatasız gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 ve a_2 ve mutlak hataları da $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ olsun. Bu sayıların gerçek değerleri için $a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ve $a_2 - \Delta_{(a_2)} < A_2 < a_2 + \Delta_{(a_2)}$ yazılabilir. Buna göre iki sayının farkı;

$$\begin{array}{r}
a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)} \\
a_2 + \Delta_{(a_2)} > A_2 > a_2 - \Delta_{(a_2)} \quad (\text{şeklinde yazılarak farkı}) \\
- \\
\hline
(a_1 - a_2) - (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)}) < A_1 - A_2 < (a_1 - a_2) + (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})
\end{array}$$

olur. Buradan, elde edilen farkın mutlak hatası, $\Delta_{(a_1-a_2)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)})$ olarak yazılabilir. Durum genelleştirilirse;

$$\Delta_{(a_1-a_2-\dots-a_n)} = (\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots + \Delta_{(a_n)})$$

ifadesine göre; bir farkın mutlak hatası, her bir sayının mutlak hatalarının toplamına eşittir. Bağıl hatanın tanımından, böyle bir farkın bağıl hatası da

$$\delta_{(a_1-a_2-\dots-a_n)} = \frac{(\Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} + \dots + \Delta_{(a_n)})}{|a_1 - a_2 - \dots - a_n|}$$

olur.

Örnek: $a_1 = 9.78$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.02$, $a_2 = 3.23$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_2)} = 0.01$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların farkının mutlak hatası;

$$\begin{array}{r} a_1 = 9.78 \\ - a_2 = 3.23 \\ \hline a_1 - a_2 = a = 6.55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \Delta_{(a_1)} = 0.02 \\ + \Delta_{(a_2)} = 0.01 \\ \hline \Delta_{(a_1)} + \Delta_{(a_2)} = \Delta_{(a)} = 0.03 \end{array}$$

$a = 6.55$ değerinin mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.03$ olmaktadır. Bağlı hatası da

$$\delta_{(6.55)} = \frac{0.03}{6.55} = 0.0046$$

olarak hesaplanır.

3.3.1.1.3. Bir Çarpımın veya Bölümün Mutlak ve Bağlı Hataları

Burada da; sayıların hatasız gerçek değerleri A_1 ve A_2 olan iki sayının hesaplanmış değerleri a_1 ve a_2 ve mutlak hataları $\Delta_{(a_1)}$, $\Delta_{(a_2)}$ ve bağlı hataları $\delta_{(a_1)}$, $\delta_{(a_2)}$ olsun. Aynı düşünce ile bu sayıların gerçek değerleri için $a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)}$ ve $a_2 - \Delta_{(a_2)} < A_2 < a_2 + \Delta_{(a_2)}$ yazılabilir. Burada;

$$a_k \pm \Delta_{(a_k)} = a_k \left(1 \pm \frac{\Delta_{(a_k)}}{a_k}\right) = a_k (1 \pm \delta_{(a_k)})$$

özelliğinden faydalanarak;

$$a_1 - \Delta_{(a_1)} < A_1 < a_1 + \Delta_{(a_1)}$$

ifadesi için

$$a_1(1 - \delta_{(a_1)}) < A_1 < a_1(1 + \delta_{(a_1)}) \text{ ve } a_2 - \Delta_{(a_2)} < A_2 < a_2 + \Delta_{(a_2)}$$

ifadesi için de

$$a_2(1 - \delta_{(a_2)}) < A_2 < a_2(1 + \delta_{(a_2)})$$

yazılabilir.

Bu iki ifadenin taraf tarafa çarpılması sonucunda elde edilen $\delta_{(a_1)}$, $\delta_{(a_2)}$ gibi ikinci dereceden terimler çok küçük olacaklarından ihmal edilerek;

$$\begin{aligned} a_1(1-\delta_{(a_1)}) &\approx A_1 - \langle a_1(1+\delta_{(a_1)}) \\ a_2(1-\delta_{(a_2)}) &\approx A_2 - \langle a_2(1+\delta_{(a_2)}) \\ \frac{x}{a_1 a_2 (1-\delta_{(a_1)} - \delta_{(a_2)})} &\approx \frac{A_1 A_2 - \langle a_1 a_2 (1+\delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)})}{x} \end{aligned}$$

ya da

$$a_1 a_2 (1 - (\delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)})) \approx A_1 A_2 - \langle a_1 a_2 (1 + (\delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)})) \rangle$$

sunucu elde edilir. Buradan da bir çarpımın bağıl hataları arasında $\delta(a_1 a_2) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)}$ ilişkisinin olduğu görülür. Neticede, varılan sonuç genelleştirilirse; çarpımın bağıl hatası,

$$\delta(a_1 a_2 \dots a_n) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)} + \dots + \delta_{(a_n)}$$

her bir çarpanın bağıl hataları toplamına eşit olduğu şeklinde genelleştirilerek söylenebilir.

Örnek: $a_1 = 1.45$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0.01$, $a_2 = 2.28$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_2)} = 0.02$ ve, $a_3 = 1.12$ sayısı ve mutlak hatası $\Delta_{(a_3)} = 0.01$ olarak verilmiş olsun, bu sayıların çarpımının bağıl hatası;

$$\delta_{(1.45*2.28*1.12)} = \frac{0.01}{1.45} + \frac{0.02}{2.28} + \frac{0.01}{1.12} \cong 0.025$$

olur. Aynı şekilde, mutlak hata ile bağıl hata arasındaki ilişkiden faydalanarak mutlak hatası da $\Delta_{(1.45*2.28*1.12)} = (1.45*2.28*1.12)*0.025 = 0.09$ olarak hesaplanabilir.

Neticede, bir çarpım işleminde eğer sayılardan birinin bağıl hatası sıfır ise, bu durumda çarpımın bağıl hatası;

$$\delta_{(a_1 a_2)} = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)} = 0 + \delta_{(a_2)} = \delta_{(a_2)}$$

ikinci sayının bağıl hatasına eşit olur.

Böylece; yuvarlatılmış hatalı bir değerın bağıl hatası *desimal* noktanın yerine bağıl değildir. Aynı şekilde, böyle bir sayı bir tam sayı ile çarpıldığında bağıl hatanın değişmediği söylenebilir. Benzer şekilde bir çarpımın mutlak hatası hesaplandığında; iki sayının çarpımının mutlak hatasının,

$$\Delta_{(a_1 a_2)} = a_1 a_2 \delta(a_1 a_2) = a_1 a_2 \delta_{(a_2)} = a_1 a_2 \frac{\Delta_{(a_2)}}{a_2} = a_1 \Delta_{(a_2)}$$

olduğu görülmektedir.

Bunun sonucunda da, sayılardan birinin mutlak hatası $\Delta_{(a_1)} = 0$ ise, mutlak hatası sıfır olan sayı ile diğer sayının mutlak hatasının çarpımı bu iki sayının çarpımının mutlak hatasına eşit olduğu söylenebilir. Bunun sonucunda da; $a_1, a_2, \dots, a_n$ yuvarlatılmış sayılar, $c_1, c_2, \dots, c_n$ de bunlara karşılık gelen pozitif tam sayılar ve $\Delta_{(a_1)}, \Delta_{(a_2)}, \dots, \Delta_{(a_n)}$ mutlak hataları olmak üzere;

$$\delta(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n) = c_1 \Delta_{(a_1)} + c_2 \Delta_{(a_2)} + \dots + c_n \Delta_{(a_n)} = \sum_{i=1}^n c_i \Delta_{(a_i)}$$

olur. Buradan; bir sayının tersinin bağıl hatası; $A \neq 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$$\Delta_{\left(\frac{1}{a}\right)} = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a - \Delta_{(a)}} \right| = \frac{\Delta_{(a)}}{a(a - \Delta_{(a)})} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2 \left(1 - \frac{\Delta_{(a)}}{a}\right)} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2 (1 - \delta_{(a)})}$$

burada $\delta_{(a)}$ değeri 1 'in yanında çok küçük olduğundan ihmal edilirse;

$$\Delta_{\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{1}{a} \delta_{(a)}$$

olduğu görülür. Buradan; bir sayının tersinin bağıl hatası da;

$$\delta_{\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\Delta_{\left(\frac{1}{a}\right)}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a} \delta_{(a)}}{\frac{1}{a}} = \delta_{(a)}$$

olur.

Neticede; bir bölümün bağıl hatasının, bölünen ve bölen sayıların,

$$\delta_{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} = \delta\left(a_1 \frac{1}{a_2}\right) = \delta_{(a_1)} + \delta_{(a_2)}$$

bağıl hatalarının toplamına eşit olduğu görülmektedir. Bu işlemlerin sonucunda; a^n gibi bir üslü ifadenin bağıl hatası;

$$\delta_{(a^n)} = \delta(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) = \delta_{(a)} + \delta_{(a)} + \dots + \delta_{(a)} = n\delta_{(a)}$$

ve mutlak hatası da;

$$\Delta_{(a^n)} = n \cdot a^n \cdot \delta_{(a)} = n \cdot a^{n-1} \Delta_{(a)}$$

olarak hesaplanabilir.

Örnek: $a = 2.00$ sayısının mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.03$ olarak bilinmektedir. Bu sayının $y = a^3$ şeklinde hesaplanan y değerinin $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hataları ne kadar olur?

Çözüm: $y = a^3$ sayısının bağıl hatası; bir çarpımın bağıl hatalarına ilişkin kurallara göre;

$$\delta_{(y)} = \delta(a^3) = \delta(a \cdot a \cdot a) = \delta_{(a)} + \delta_{(a)} + \delta_{(a)} = 3\delta_{(a)}$$

olur. Mutlak hatası ise; $\delta_{(y)} = \frac{\Delta_{(y)}}{|y|}$ ve $\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|}$ tanımlarından

$$\Delta_{(y)} = |y|\delta_{(y)} = |a^3|\delta_{(y)} = 3|a^3|\delta_{(a)} = 3|a^3|\frac{\Delta_{(a)}}{|a|} = 3a^2\Delta_{(a)} = 3(2^2)0.03 = 0.36$$

olarak hesaplanır. Buradan bağıl hatası,

$$\delta_{(y)} = \frac{\Delta_{(y)}}{|y|} = \frac{\Delta_{(y)}}{|a^3|} = \frac{0.36}{8} = 0.045$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde; $y = \sqrt[n]{a}$ gibi n dereceden bir köklü ifadenin bağıl hatası da, $y^n = a$ olduğundan, $\delta_{(y^n)} = \delta_{(a)}$ olur. Böylece, problem üslü bir sayının bağıl hatasına dönüştürülmüş olur. Üslü sayının bağıl hatasına göre; $\delta_{(y^n)} = n\delta_{(y)}$ olacağından, n dereceden bir sayının kökünün bağıl hatası $\delta_{(y)} = \frac{1}{n}\delta_{(a)}$ olarak elde edilir. Mutlak hatası da;

$$\Delta_{(y)} = |y|\delta_{(y)} = \left|\sqrt[n]{a}\right|\delta_{(y)} = \frac{\left|\sqrt[n]{a}\right|}{n}\delta_{(a)} = \frac{\left|\sqrt[n]{a}\right|}{n}\frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{\left|\sqrt[n]{a}\right|}{n a}\Delta_{(a)}$$

olarak hesaplanmış olur.

Örnek 1: $a = \sqrt[3]{y}$ gibi bir işlemde; $y=8$ ve mutlak hatası $\Delta_{(y)} = 0.36$ olarak verilmektedir. Buradan hesaplanacak olan küp kök $a = ?$ değerinin $\Delta_{(a)} = ?$ mutlak ve $\delta_{(a)} = ?$ bağıl hatalarının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 1: Burada her tarafın küpü alırsa $y = a^3$ olur. Bir çarpımın bağıl hatası kuralından faydalanarak, $\delta_{(y)} = \delta(a^3) = 3\delta_{(a)}$ ifadesinden, $\delta_{(a)} = \frac{\delta_{(y)}}{3}$ elde edilir.

Burada; $\delta_{(y)} = \frac{\Delta_{(y)}}{|y|} = \frac{0.36}{8} = 0.045$ olduğundan, $\delta_{(a)} = \frac{\delta_{(y)}}{3} = \frac{0.045}{3} = 0.015$ ve

bağıl hatasının da; $\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|}$ şeklindeki tanımından hareket ederek,

$\Delta_{(a)} = |a|\delta_{(a)} = 2(0.015) = 0.03$ olarak hesaplanır.

Örnek 2: $y = a^{-1}$ işleminde; $a = 2.00$ ve $\Delta_{(a)} = 0.03$ olarak verilmiş olduğuna göre, $\delta_{(y)} = ?$ bağıl ve $\Delta_{(y)} = ?$ mutlak hataları ne kadardır? Hesaplayınız.

Çözüm 2: Bağlı hatanın tanımından hareket edilerek değeri $\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} = \frac{0.03}{2} = 0.015$ olarak hesaplanabilir. Sonra, $y = a^{-1}$ şeklindeki bir işlemin mutlak ve bağlı hataları,

$$\Delta_{(y)} = \Delta(a^{-1}) = \Delta\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\Delta_{(a)}}{a^2} = \frac{1}{a} \frac{\Delta_{(a)}}{a} = \frac{1}{a} \delta_{(a)} = \frac{1}{2} (0.015) = 0.0075$$

$$\delta_{(y)} = \delta(a^{-1}) = \delta\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\Delta_{(1/a)}}{\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a} \delta_{(a)}}{\frac{1}{a}} = \delta_{(a)} = 0.015$$

olarak hesaplanır.

Örnek 3: $\sqrt{5} = 2.2$ ve bağlı hatası $\delta_{(\sqrt{5})} = \frac{0.05}{\sqrt{5}}$, $\pi = 3.1$ ve bağlı hatası

$\delta_{(\pi)} = \frac{0.05}{\sqrt{\pi}}$ olduğu bilindiğine göre $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$ işleminin $\delta_{(\frac{\sqrt{5}}{\pi})} = ?$ bağlı hatası ne

kadar olduğu hesaplanmak istenmektedir.

Çözüm 3: için iki sayının bölümünün bağlı hatası, pay ve paydanın bağlı hatalarının toplamına eşit olacağından; benzer şekilde yapılan işlemlerden,

$$\delta_{(\frac{\sqrt{5}}{\pi})} = \delta_{(\sqrt{5})} + \delta_{(\pi)} = \frac{0.05}{\sqrt{5}} + \frac{0.05}{\sqrt{\pi}} \cong 0.04$$

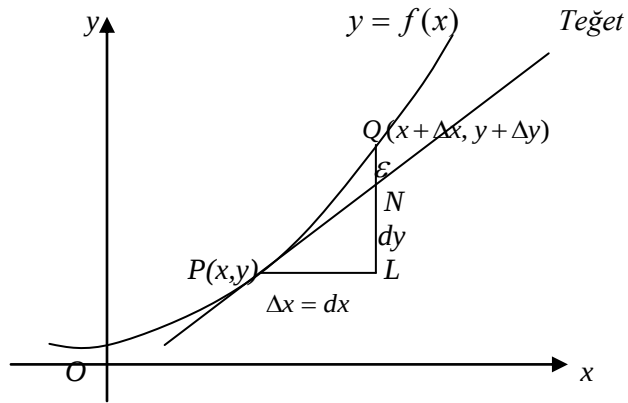
olarak hesaplanır.

3.3.1.2. Tek Değişkenli Fonksiyonların Mutlak ve Bağlı Hatası

$y = f(x)$ gibi tek değişkenli bir fonksiyonda bağımsız değişken x 'in mutlak hatası $\Delta_{(x)}$ olmak üzere, fonksiyonun $\Delta_{(y)}$ mutlak hatası aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Bu amaçla; $y = f(x)$ fonksiyonunun x göre diferansiyeli alınarak, $dy = f'(x) dx$ bağıntısı elde edilir.

Burada; NPL Açısı α , QPL açısı da β , $LQ = \Delta y = NL + NQ = NQ + dy$,
 $PL = \Delta x = dx$ ve

$$\tan \alpha = \frac{NL}{PL} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\Delta x} \quad ; \quad \tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{dır.}$$



Şekil 3: Tek Değişkenli Fonksiyonların Mutlak Hatası

Ayrıca;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon = f'(x) + \varepsilon$$

olacağından $\Delta y = \Delta x f'(x) + \Delta x \varepsilon$ yazılabilir. Burada; bağımsız değişkendeki sonlu ve diferansiyel artma miktarı $\varepsilon \rightarrow 0$ olacağından ihmal edilerek,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{ve} \quad dy = f'(x)dx$$

neticede bu bağıntılardaki diferansiyel artımlar yerine sonlu artım değerleri kullanılarak da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{ve} \quad \Delta y = f'(x) \Delta x$$

yazılabilir.

Buna göre; $y = f(x)$ diferansiyeli olan bir fonksiyon olmak üzere; x bağımsız değişkeninin x_0 yaklaşık değeri için bu fonksiyonun mutlak hatası;

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{ve} \quad x = x_0 + \Delta x$$

olduğu dikkate alınarak;

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \Delta x$$

olur. Buna göre burada; Δy için, Δy ve Δx içinde Δx mutlak hataları kullanılırsa, tek değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası için,

$$\Delta y = f'(x) \Delta x$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde, bağıl hatası da, bağıl hatanın tanımından hareket ederek,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \frac{\Delta y}{|y_0|} = \frac{\Delta y}{|f(x_0)|} = \frac{f'(x_0) \Delta x}{|f(x_0)|} = \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \Delta x = f'(x_0) \delta_{x_0}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Örnek: $f(x) = x^\alpha$; gibi bir fonksiyonun $x_0 = 20.00$ ve mutlak hatası $\Delta_{x_0} = 0.02$ ve $\alpha = 5$ gibi reel bir sayı olmak üzere mutlak ve bağıl hatalarının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alınarak; $\Delta y = f'(x)_0 \Delta x$ bağıntısından faydalanarak mutlak hatası,

$$\Delta y = f'(x) \Delta x = \left| \alpha x^{\alpha-1} \right| \Delta x = \left| 5 (20.00)^4 \right| 0.02 = 16000 \quad \text{bulunur.}$$

Daha sonra buradan bağıl hatası,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \Delta x = \left| \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha} \right| \Delta x = \left| \frac{\alpha x^{\alpha}}{x^\alpha x^{\alpha-1}} \right| \Delta x = \left| \frac{\alpha}{x} \right| \Delta x = \alpha \frac{\Delta x}{|x|} = \alpha \delta(x) = 5 \frac{0.02}{|20.00|} = 0.005$$

Örnek: $y = f(x) = \log x$ fonksiyonunun ; x bağımsız değişkenin x_0 değerine karşılık gelen mutlak ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm: Bu fonksiyonun diferansiyeli alınacağından, burada on tabanlı logaritmik bir ifade olarak verilmiş olan $y = f(x) = \log x$ fonksiyonunun önce *Neper logaritmasına* dönüştürülmüş şekli elde edilerek, $y = f(x) = \log x = \mu \ln x$ biçiminde yazılır. Burada $\mu = \ln e \cong 0.43$.. on tabanlı logaritma ile *Neper* logaritması arasında dönüşümü sağlayan bir katsayıdır. Dana sonra; *Neper logaritması* biçiminde ifade edilmiş olan fonksiyonun türevi alınarak,

$$y' = f'(x) = \frac{\mu}{x} = \frac{0.43}{x}$$

elde edilir. Buradan, tek değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatasını veren; $\Delta_y = f'(x)_0 \Delta_x$ bağıntısından faydalanarak, bu fonksiyonun mutlak hatası,

$$\Delta_y = f'(x) \Delta_x = \left| \frac{0.43}{x} \right| \Delta_x = 0.43 \frac{\Delta_x}{|x|} = 0.43 \delta_{(x)}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde, bağıl hatası da,

$$\delta_y = \delta_{(f(x))} = \frac{\Delta_y}{|y|} = \left| \frac{f'(x)_0}{f(x)_0} \right| \Delta_x = \left| \frac{\mu x^{-1}}{\log x} \right| \Delta_x = \left| \frac{\mu x^{-1}}{\mu \ln x} \right| \Delta_x = \frac{\mu}{x} \frac{1}{\mu \ln x} \Delta_x = \frac{1}{x \ln x} \Delta_x$$

olarak hesaplanır.

3.3.1.2. Birden Fazla Değişkenli Fonksiyonların Mutlak ve Bağıl Hatası

Benzer şekilde hareketle; $z = f(x, y)$ gibi iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası, bağımsız değişkenlerin ; x_0 ve y_0 değeri için; $\Delta x = x - x_0$ ve $\Delta y = y - y_0$ olmak üzere, fonksiyonun birinci dereceden diferansiyel ifadesine göre,

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \right| \Delta x + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \right| \Delta y = \left| \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 \right| \Delta x + \left| \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 \right| \Delta y$$

açılımından faydalanarak,

$$\Delta_z = \left| \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 \right| \Delta_x + \left| \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 \right| \Delta_y$$

şeklinde hesaplanabilir. Daha sonra bağıl hatanın genel tanımından hareket ederek, bu fonksiyonun $\delta_{(z)}$ oransal hatası da,

$$\delta_{(z)} = \frac{\Delta_z}{|z|}$$

olarak bulunabilir.

Örnek: x_0 ve y_0 değerleri için mutlak hataları Δ_x ve Δ_y olan iki bağımsız değişkenin; $z = xy$ gibi bir fonksiyonun mutlak ve bağıl hatalarının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: Önce bu fonksiyonun her iki değişkene göre türevleri alınarak;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

değerleri elde edilir. Bu değerlerden, z fonksiyonun mutlak hatası; $\Delta_z = y_0 \Delta_x + x_0 \Delta_y$ olarak hesaplanır. Benzer şekilde; bağıl hatası da;

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{|z_0|} = \frac{y_0 \Delta_x + x_0 \Delta_y}{|(xy)_0|} = \frac{\Delta_x}{|x_0|} + \frac{\Delta_y}{|y_0|} = \delta_x + \delta_y$$

şeklinde bulunabilir.

Buradan, bir genelleme yapılırsa; $z = f(x, y, \dots, t)$ gibi fazla sayıda bağımsız değişkenli bir fonksiyonun mutlak hatası, bağımsız değişkenlerin ; x_0 , y_0 ve t_0 değeri için mutlak hataları Δ_x , Δ_y ve Δ_t olmak üzere,

$$\Delta_z = \left| \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 \right| \Delta_x + \left| \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 \right| \Delta_y + \dots + \left| \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_0 \right| \Delta_t$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu değere karşılık gelen $\delta_{(z)}$ bağıl hatası da;

$$\delta_{(z)} = \frac{\Delta_z}{|z|}$$

olarak hesaplanabilir.

3.3.2. Karesel Ortalama Hata, Mutlak Hatalar Ortalaması ve Muhtemel Hatalar

Sayısal çözümlemede; örneklemeler veya gözlemler sonucunda elde edilen verilerin kullanılması ile yapılan sayısal hesaplamalarda, input verileri belli bir miktar rasgele ölçü hatalarını içereceklerinden, yapılan çözüm sonucunda kestirilen parametrelerin ne derece doğru ve güvenilir olmalarının da bilinmesi istenir. Bu gibi durumlarda, hata teorisi kurallarına uygun olarak bazı hata ölçütleri tanımlanarak kullanılır. Daha çok matematik istatistik bir anlam taşıyan bu hata ölçütleri,

- Mutlak hatalar ortalaması
- Muhtemel hata
- Karesel ortalama hata (*bunun için kısaca “ortalama hata” da kullanılır*)

şeklinde üç ayrı isim altında ele alınabilirler.

Deneysel veriye konu bir büyüklüğün,

A : gerçek değeri,
 a : deneysel veri değeri

ise, kaba sistematik hatalardan arındırılmış a deneysel veri değeri bir takım rasgele düzensiz hataları içermektedir. Bu hatanın toplam değeri, Gauss'un ifadesine göre,

$$-\varepsilon = a - A$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; o büyüklüğün A gerçek değerini ifade ettiğinden ε gerçek hata olur. Bir büyüklüğe ilişkin n sayıda yapılan denemeler sonucunda elde edilen deneysel veriler; a_i ; $i=1,2,3,...,n$ olarak gösterilirse, her biri için gerçek hata da $-\varepsilon_i = a_i - A$; $i=1,2,3,...,n$ adet olur. Bu hatalardan faydalananarak;

***t* -Mutlak hatalar ortalaması;** hataların mutlak değerlerinin aritmetik ortalamasını almak suretiyle,

$$t = \frac{[\varepsilon]}{n} \quad ; \quad [\varepsilon] = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + \dots + |\varepsilon_n|$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada; köşeli parantezler, Gauss gösterimine toplama işlemini ifade etmektedir. Bir diğer hata ölçütü muhtemel(*olası*) hata kullanılmaktadır.

***r* -Muhtemel hata,** bir büyüklüğe ilişkin n adet deneysel verinin $\varepsilon_i = a_i - A$ gerçek hataları, $|\varepsilon_i| = |a_i - A|$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ şeklindeki mutlak değerlerine göre; büyükten küçüğe yada tersi sırada büyüklük sırasına dizilirler. Ortanca değer, bunları en iyi temsil eden değer kabul edilir ve r -muhtemel hata olarak tanımlanır. n sayısının tek sayı olması halinde, r -muhtemel hata; n tekrar sayısının tek sayı olması halinde,

$$r = \left| \varepsilon \right|_{\frac{n+1}{2}}$$

ve n tekrar sayısının çift sayı olması halinde de,

$$r = \frac{\left| \varepsilon \right|_{\frac{n}{2}} + \left| \varepsilon \right|_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

bağıntılarından hesaplanabilmektedir.

***m* -Karesel ortalama hata;** normal dağılımdaki rasgele özelliklere sahip olan $-\varepsilon_i = a_i - A$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ hatalarının birleşik olasılık fonksiyonunu maksimum yapan $[\varepsilon\varepsilon] \Rightarrow \min.$ değerine karşılık gelen,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad ; \quad [\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

formülünden hesaplanır.

Bu ölçüt matematik istatistikte “standart sapma” ,ya karşılık gelen bir değer olduğundan, bazen de değişik kaynaklarda; “standart hata” olarak adlandırılmaktadır.

Günümüzde; yapılan birçok incelemeler neticesinde; farklı şekillerde tanımlanan bu tür hata ölçütleri arasında; $r = 0.674 m$ ilişkisinin olduğu ve neticede, $m \geq t \geq r$ sıralaması bulunmaktadır. Bütün hatalarla ilgili özellikleri en iyi yansıtmayı nedeniyle uygulamada daha çok bu hata ölçütü kullanılmaktadır.

Uygulamada; deneysel çalışmalar sonucunda elde edilen verilerden hiçbir zaman A gerçek sayı değeri bilinemez. Ancak, bunun yerine her zaman buna en yakın olan ve onu en iyi temsil eden en muhtemel değeri olan $\bar{x}$ - kesin değeri bilinebilir. Bu durumda, karesel ortalama hata, bu değerlere göre tanımlanır. Bu durumda gerçek hatanın tanımındaki gerçek değer yerine, onun hesaplamalar sonucunda değeri bilinen $\bar{x}$ kesin değeri kullanılarak tanımlanan, görünen hata; $-v = a - \bar{x}$ şeklinde tanımlanır. İlk yıllarda böyle kullanılmasına rağmen, daha sonraki yıllarda, özellikle 1960 yıllardan sonra “*Hata teorisiyle uğraşanlar tarafından*”, bu tanımın yerine, görünen hatanın tersi işaretlisi olan sadece “*düzeltilme*” terimi kullanılmaktadır. Bu iki hata arasında; $-v = a - \bar{x}$ ve $-\varepsilon = a - A$ bağıntılarından faydalananarak, $\varepsilon = (A - \bar{x}) + v$ kurularak, n adet ölçü için,

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = (A - \bar{x}) + v_1 & \varepsilon_1^2 = (A - \bar{x})^2 + v_1^2 + 2v_1(A - \bar{x}) \\ \varepsilon_2 = (A - \bar{x}) + v_2 & \varepsilon_2^2 = (A - \bar{x})^2 + v_2^2 + 2v_2(A - \bar{x}) \\ : & : \\ \varepsilon_n = (A - \bar{x}) + v_n & \varepsilon_n^2 = (A - \bar{x})^2 + v_n^2 + 2v_n(A - \bar{x}) \end{array} \quad \text{ve}$$

yazılıp, her birinin $[\varepsilon]$ ve $[\varepsilon\varepsilon]$ toplamında; $[v]=0$ ve gerçek hataların çapraz çarpımlarının umut değerinin $E\{\varepsilon_i\varepsilon_j\}=0$ ve neticede, $[\varepsilon]^2 \cong [\varepsilon\varepsilon]$ olduğu dikkate alındığında, $(n-1)[\varepsilon\varepsilon] = n[vv]$ olduğu yazılabilir. Buna göre, tek parametrelili bir büyüklüğe ilişkin n adet deney veri sonuçlarından, görünen hataları veya düzeltmeleri kullanarak, karesel ortalama hata, duyarlılıkları eşit ve korelasyonsuz veriler için,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad ; \quad [vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2$$

olarak hesaplanabilir.

Duyarlılıkları eşit ve korelasyonsuz verilerden, $[vv] \Rightarrow \min.$ en küçük kareler ilkesine göre,

$$\bar{x} = \frac{[a]}{n}$$

şeklinde hesaplanan kesin değerin karesel ortalama hatası,

$$m_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_1}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_2}\right)^2 m^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial a_n}\right)^2 m^2} = \pm \sqrt{m^2 + m^2 + \dots + m^2} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

olarak hesaplanabilir.

Verilerin farklı duyarlılıkta ve korelasyonsuz olmaları halinde ise; $\bar{x}$ kesin değeri diğer adıyla genel ortalama değeri, p_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ her bir verinin ne derece doğru ve güvenilir olduğunu gösteren ve tekrar sayıları olarak rastlanılan ağırlık değerlerini göstermek üzere, $[Pvv] \Rightarrow \min.$ ilkesine göre elde edilen,

$$\bar{x} = \frac{[pa]}{n}$$

bağıntısından hesaplanır. Buna göre de; birim ağırlıktaki bir verinin karesel ortalama hatası;

$$m = \pm \sqrt{\frac{[Pvv]}{n-1}} \quad ; \quad [Pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots + p_n v_n^2$$

bağıntısından ve genel ortalamanın karesel ortalama hatası,

$$m_{\bar{x}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[P]}} \quad ; \quad [P] = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

olarak hesaplanır. Verilerin korelasyonlu olmaları durumunda da; $\underline{P} = \underline{Q}^{-1}$ veriler arasındaki ters ağırlık matrisinden faydalanılır. Buna göre; kesin değer, $e^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ birim vektör olmak üzere,

$$\bar{x} = \frac{e^T \underline{Pa}}{e^T \underline{Pe}}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde, birim ağırlıkta bir verinin karesel ortalama hatası,

$$m = \pm \sqrt{\frac{\underline{v}^T \underline{Pv}}{n-1}}$$

ve genel ortalamanın karesel ortalama hatası da,

$$m_{\bar{x}} = \pm \frac{m}{\sqrt{\underline{e}^T \underline{Pe}}}$$

olarak bulunurlar.

Özetle, hata teorisi bakımından, sayısal çözümlemede, durum böyle olmasına rağmen, algoritma çözümlerinde *kondisyon* bozuklukları nedeniyle algoritma çözüm işlemi ünitesinde etkili olabilecek, daha çok bu üniteadaki sayılardaki kesme ve yuvarlatmalardan kaynaklanacak hatalarla uğraşmaktadır. Buna karşılık, input yada girdi ünitesi verilerinde olabilecek ölçü hataları ile parametre kestiriminin söz konusu olduğu algoritma çözümlerinde bu hataların yanında *rasgele ölçü hataları* ile de uğraşmaktadır. Bu nedenle, yuvarlatılmış veya kesme hatalarını da içinde bulundurabilecek sayıların kullanıldığı, girdi ünitesindeki sayıların hatasız kabul edildiği sayısal çözümleme algoritmalarında daha çok mutlak hata ve bağıl hata ölçütleri kullanılmaktadır.

Örnek: Bir deney sonucunda elde edilen verilerin ε -gerçek hataları, $\varepsilon_1 = -2$, $\varepsilon_2 = +3$, $\varepsilon_3 = -4$, $\varepsilon_4 = +6$, $\varepsilon_5 = +5$ olarak verilmektedir. Bu verilere ilişkin, muhtemel hatayı, mutlak hatalar ortalamasını ve karesel ortalama hata değerlerinin hesaplanması istenmektedir.

Çözüm:

a) Muhtemel hata; önce bu hataların mutlak değerleri alarak, büyüklüklerine göre; $|\varepsilon_1| = |-2|$, $|\varepsilon_2| = |+3|$, $|\varepsilon_3| = |-4|$, $|\varepsilon_4| = |+6|$, $|\varepsilon_5| = |+5|$ şeklinde sıralandıklarında ortaya gelen değer, $|\varepsilon_3| = |-4|$ olduğundan, muhtemel hata; $r = +4$ olur.

b) Mutlak hatalar ortalaması: hatalar mutlak değerlerine göre $[\varepsilon] = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + |\varepsilon_4| + |\varepsilon_5| = 20$ ve tekrar sayısı $n = 5$ alınarak,

$$t = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{20}{5} = +4$$

olarak hesaplanır.

c) Karesel ortalama hatası; $[\varepsilon\varepsilon] = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 = 90$ olduğundan,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \frac{90}{5} = \pm 4.23$$

olarak hesaplanır.

Örnek: Deney sonucunda, bir büyüklüğe ilişkin elde edilen veriler; 71, 79, 68, 67, 71, 64, 73, 76, 79 olarak verilmektedir. Bu verilere ilişkin kesin değeri ve karesel ortalama hatasının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözüm işlemlerinin daha kolay ve basit bir şekilde yapılabilmesi için bütün veriler aşağıda görüldüğü gibi

i	a_i - verileri	$v_i = \bar{x} - a_i$	v_i^2
1	71	1	1
2	79	-7	49
3	68	4	16
4	67	5	25
5	71	1	1
6	64	8	64
7	73	-1	1
8	76	-4	16
9	79	-7	49
$[a] = 648$ $\bar{x} = \frac{[a]}{9} = \frac{648}{9} = 72$		$[v] = 0$ <i>Denetim</i>	$[vv] = 222$

şeklinde bir tabloya yerleştirilerek kesin değer (*aritmetik ortalama*), görünen düzeltmeler ve daha sonra da karelerinin toplamı hesaplanır. Buradan, kesin değerin (*aritmetik ortalamanın*) karesel ortalama hatası, birim verinin karesel ortalama hatası,

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \frac{222}{9-1} = \pm 5.22$$

şeklinde elde edildikten sonra

$$m_{\bar{x}} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \frac{5.22}{\sqrt{9}} = \pm 1.76$$

olarak hesaplanır.

ÖRNEK PROBLEMLER

Örnek 1: $A = \frac{a}{b}c$ ifadesinde; $a = 10.00$, $\Delta_{(a)} = 0.02$, $b = 2.00$, $\Delta_{(b)} = 0.01$, $c = 4.00$ ve $\Delta_{(c)} = 0.03$ olarak verildiğine göre, A değerinin $\Delta_{(A)} = ?$ mutlak ve $\delta_{(A)} = ?$ bağıl hatalarının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 1: Bu problemin çözümünde bir çarpımın ve bölümün bağıl hatalarının hesaplanmasındaki kurallardan hareket ederek,

$$\delta_{(A)} = \delta_{\left(\frac{a}{b}\right)} + \delta_{(c)} = \delta_{(a)} + \delta_{(b)} + \delta_{(c)}$$

yazılabilir. Her bir elamanın bağıl hatası için,

$$\delta_{(a)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} , \delta_{(b)} = \frac{\Delta_{(b)}}{|b|} \text{ ve } \delta_{(c)} = \frac{\Delta_{(c)}}{|c|}$$

oldukları göz önüne alınarak, A sonucun bağıl hatası,

$$\delta_{(A)} = \delta_{\left(\frac{a}{b}c\right)} = \delta_{(a)} + \delta_{(b)} + \delta_{(c)} = \frac{\Delta_{(a)}}{|a|} + \frac{\Delta_{(b)}}{|b|} + \frac{\Delta_{(c)}}{|c|} = \frac{0.02}{10.00} + \frac{0.01}{2.00} + \frac{0.03}{4.00} = 0.0145$$

olarak hesaplanır. Mutlak hatanın tanımından hareket ederek, A değerinin mutlak hatası,

$$\delta_{(A)} = \frac{\Delta_{(A)}}{|A|}$$

bağıntısından,

$$\delta_{(A)} = \frac{\Delta_{(A)}}{|A|} \Delta_{(A)} = |A| \delta_{(A)} = \left| \frac{a}{b} c \right| \delta_{(A)} = 20(0.0145) = 0.29$$

olarak bulunur.

Örnek 2: Bir dik üçgende; α açısına komşu dik kenar uzunluğu $a = 10.00m$ ve mutlak hatası $\Delta_{(a)} = 0.02m$ olarak verilmiştir. Ayrıca, $\sin \alpha = 0.6$ ve $\Delta_{(\alpha)} = 0.02^g$ verilmektedir. Karşı dik kenarın mutlak ve bağıl hatalarının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 2: Bu dik üçgende, α açısının karşısındaki kenar uzunluğu b ile gösterilirse, $b = a \tan \alpha$ olur. Burada;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

hesaplanır. Neticede, karşı dik kenarın mutlak hatası, $\rho = \frac{200}{\pi} \cong 63^g.6620$ olmak üzere,

$$\Delta_{(b)} = \tan \alpha \Delta_{(a)} + a \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\Delta_{(\alpha)}}{\rho} = 0.75(0.02) + 10.00 \frac{1}{0.64} \frac{0.02^g}{63.6620^g} = 0.0199 \cong 0.02 \text{ m.}$$

hesaplanır. Bağıl hatası da, benzer şekilde bağıl hatanın tanımından faydalanarak,

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.02}{|a \tan \alpha|} = \frac{0.02}{7.5} = 0.0027$$

olarak bulunur.

Örnek 3: Bir dik üçgende; α açısına komşu dik kenar uzunluğu $a = 10.00m$ ve karesel ortalama hatası $m_a = 0.02m$ olarak verilmiştir. Ayrıca, $\sin \alpha = 0.6$ ve $m_\alpha = 0.02^g$ verilmektedir. Karşı dik kenarın $m_b = ?$ karesel ortalama hatasının hesaplanması istenmektedir.

Çözüm 3: bir önceki örnek de olduğu gibi, bu dik üçgende, α açısının karşısındaki kenar uzunluğu b ile gösterilirse, $b = a \tan \alpha$ olur. Burada;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

olarak hesaplanabilir. Hataların yayılması kuralından hareket ederek, üçgenin b dik kenarının m_b – karesel ortalama hatası,

$$\begin{aligned} m_{(b)} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \pm \sqrt{\tan^2 \alpha m_a^2 + \left(a \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}} = \\ &= \pm \sqrt{(0.75)^2 (0.02)^2 + (10.00 \frac{1}{0.64})^2 \frac{(0.02)^2}{(63.6620)^2}} = \pm 0.01578 \text{ m.} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

ALİŞTIRMALAR

Problem 1:

$$\begin{aligned} d &= (a^2 - \sqrt[3]{b}) & d &= (a^2 + \sqrt[3]{b}) & d &= \frac{(a^3 - b)}{c} \\ d &= (a^2 - \sqrt[3]{b}) 10 & ; & & d &= (a^2 + \sqrt[3]{b}) 10 & \text{ve} & & d &= \frac{(a^3 + b)^2}{6c} \\ d &= (a^2 - \sqrt[3]{b}) c & & & d &= (a^2 + \sqrt[3]{b}) c & & & & \end{aligned}$$

işlem sonuçlarının $\Delta_{(d)}$ mutlak ve $\delta_{(d)}$ bağıl hatalarını; $a = 4.00$, $b = 8.00$, $c = 3.00$ alarak ve mutlak hataları için de $\Delta_{(a)} = 0.03$, $\Delta_{(b)} = 0.02$, $\Delta_{(c)} = 0.01$ değerlerini kullanarak, hesaplayınız.

Problem 2:

$$\begin{aligned} y &= \sin \alpha - \sin \beta & ; & & y &= \sin \alpha - \cos \beta & ; & & y &= \sin(\alpha - \beta) & \text{ve} & & y &= \cos(\alpha - \beta) \\ y &= \sin \alpha + \sin \beta & ; & & y &= \sin \alpha + \cos \beta & ; & & y &= \sin(\alpha + \beta) & & & y &= \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

fonksiyonlarının $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hatalarını, $\sin \alpha = 0.866$, $\sin \beta = 0.471$ değerleri için, $\Delta_{(\alpha)} = 0.06$, $\Delta_{(\beta)} = 0.02$ mutlak hatalarına göre hesaplanmak istenmektedir.

Problem 3:

$$\begin{array}{ll} y = \ln x & y = \log x \\ y = \ln x^3 & y = \log x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} y = \ln \sqrt{x} \\ y = \log x^2 \end{array}$$

fonksiyonlarının $\Delta_{(y)}$ mutlak ve $\delta_{(y)}$ bağıl hatalarını; $x = 25.00$ için $\Delta_{(x)} = 0.02$ olarak hesaplanmak istenmektedir. (Burada $\mu = \log_{10} e$ 'nin yaklaşık değeri için $\mu \cong 0.43429$. kullanılabilir)

Problem 4:

$$\begin{array}{lllll} z = \log \frac{x-y}{x+y} & z = \ln \frac{x-y}{x+y} & z = \frac{x-y}{x+y} & z = \sqrt{x-y} & z = (x-y)^2 \\ z = \log \frac{x+y}{x-y} & z = \ln \frac{x+y}{x-y} & z = \frac{x+y}{x-y} & z = \sqrt{x+y} & z = (x+y)^2 \end{array}$$

fonksiyonlarının, $\Delta_{(z)}$ mutlak ve $\delta_{(z)}$ bağıl hatalarını; $x = 8.00$, $y = 2.00$ ve mutlak hataları $\Delta_{(x)} = 0.06$, $\Delta_{(y)} = 0.02$ olarak hesaplanmak istenmektedir. ($\mu \cong 0.43$.. alınabilir.)

Problem 5: Bir eşkenar üçgenin kenarlarından biri, $a = 8.00cm$ ve mutlak hatası da $\Delta_{(a)} = 0.5cm$ olarak verildiğine göre, üçgenin alanı, mutlak ve bağıl hataları ne kadar olur? Hesaplanmak istenmektedir.

Problem 6: Bir küpün kenarlarından biri, $a = 10.00cm$ ve mutlak hatası da $\Delta_{(a)} = 0.5cm$ olarak verildiğine göre, küpün hacmi, mutlak ve bağıl hataları ne kadar olur? hesaplanmak istenmektedir.