



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-I / Rasgele Değişkenler ve Dağılımları

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Rassal Değişken Kavramı

Tanım: Değeri bir deney sonucuyla belirlenen bir değişkene rastgele veya rassal değişken denir.

- Milli takımın her maçta attığı gol sayısı,
- Bir bayide haftalık veya aylık araba satışlarının sayısı,
- Bir ailedeki çocuk sayısı,
- Bir makinede üretilen ürünlerden hatalı olanların sayısı,
- Belli bir bileşiğin içindeki alkol yüzdesi birer rassal değişkendir.

Rassal Değişken Kavramı

Otomobil Sayısı (X)	Frekans (Sıklık)	Göreceli (bağıl) sıklık
0	30	0,015
1	470	0,235
2	850	0,425
3	490	0,245
4	160	0,080
Toplam	N=2000	1,000

- Bu gruptan rastgele bir aile seçilsin ve ailenin sahip olduğu otomobil sayısı X ile gösterilsin.
- Bu X değişkeninin alabileceği değerler 0,1,2,3,4 olmaktadır.
- X değeri, seçilen aileye göre değişim gösterir. Yani X, rassal deneyin sonuçlarına bağlı olup bu X değişkenine rassal değişken denir.
- Rassal değişkenler X,Y,Z, gibi büyük harflerle; rassal değişkenin alabileceği değerler ise, x,y,z, gibi küçük harflerle gösterilir.

Örneğin; yukardaki tabloda satılan otomobil sayısı X ile, X'in alabileceği değerler ise x_1, x_2, x_3, x_4 ile gösterilir. $P(X=x)$ olarak tanımlanır.

$P(X=x_3)$: Satılan otomobil sayısı rassal X'in alabileceği değer x_3 (yani $x_3=2$) olma olasılığı.

Kesikli Rassal Değişken

Tanım: X bir rassal değişken olsun. X 'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise, X 'e kesikli rassal değişken denir.

- Bir zarın atılması deneyini düşünelim. Bu deney için örnek uzayı $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ olur ve S 'de sonlu sayıda eleman vardır. Sonuç olarak, bu örnek uzayında (S 'de) tanımlanan X , kesikli rassal değişkendir.
- Bir paranın iki kez atılması deneyinde örnek uzayı $S = \{YY, YT, TY, TT\}$ 'dir. X rassal değişkeni «bulunan T'lerin sayısı» olsun. Böylece X 'in alabileceği değerler: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 2$ 'dir. O halde X kesikli rastgele değişkendir.

Sürekli Rassal Değişken

- Pek çok fiziksel veya mekanik deneylerde ölçümler, iki değer arasında her değeri alabilir. Yani S örnek uzayı sayılabilir değildir ve rassal değişken zaman, ağırlık, uzunluk, ... gibi ölçümlerin sonucu olan her hangi bir gerçel sayıyı alabilir. Bu tip rassal değişkenlere sürekli rassal değişkenler denir.

Tanım: X bir rassal değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa, X 'e sürekli rassal değişken denir.

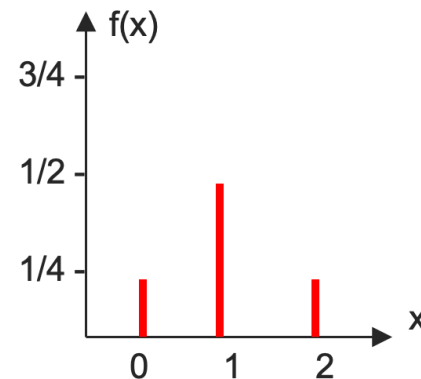
- Bir pilin ömrü en fazla 200 saat ise, bu pilin ömrü $0 - 200$ saat arasında X 'in alabileceği değerler olabilmektedir.

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

Bir kesikli rassal değişkenin olasılık dağılımı ya da olasılık fonksiyonu, rassal değişkenin alabileceği değerlerin, karşılık gelen olasılıklarla birlikte açıklanmasıdır.

- Bir paranın iki kez atılması deneyinde, ‘bulunan T’lerin sayısı’ X rassal değişkeninin alabileceği değerlerin $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 2$ olacağını belirtmiştik.
- X ‘in x_i değerini alma olasılığı $f(x)$ ve $f(x) = P(X=x)$ olmak üzere;

$X = x$	0	1	2
$P(X=x) = f(x)$	1/4	1/2	1/4



$$f(0) = P(X=0) = 1/4$$

$$f(1) = P(X=1) = 1/2$$

$$f(2) = P(X=2) = 1/4$$

$$\sum f(x_i) = 1$$

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

Tanım: X , sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini, $f(x_i) = P(X=x_i)$, ($i=1,2, \dots, N$ olmak üzere) olasılıkları ile alabilen kesikli rassal değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X 'in olasılık fonksiyonu denir.

➤ $f(x) \geq 0$, tüm x 'ler için,

➤
$$\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1$$

Böylece X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki formda olur:

$X = x$	x_1	x_2		x_N
$P(X=x) = f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_N)$

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

X rassal değişkenin x 'e eşit ya da küçük olması gibi toplamalı olasılığına X rassal değişkenin kümülatif (eklemeli, birikimli) dağılım fonksiyonu veya kısaca dağılım fonksiyonu denir ve şu şekilde tanımlanır:

Tanım: Bir X rassal değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir ve X'in x 'e eşit ya da daha küçük olma olasılığıdır. O halde,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \text{ 'dir.}$$

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

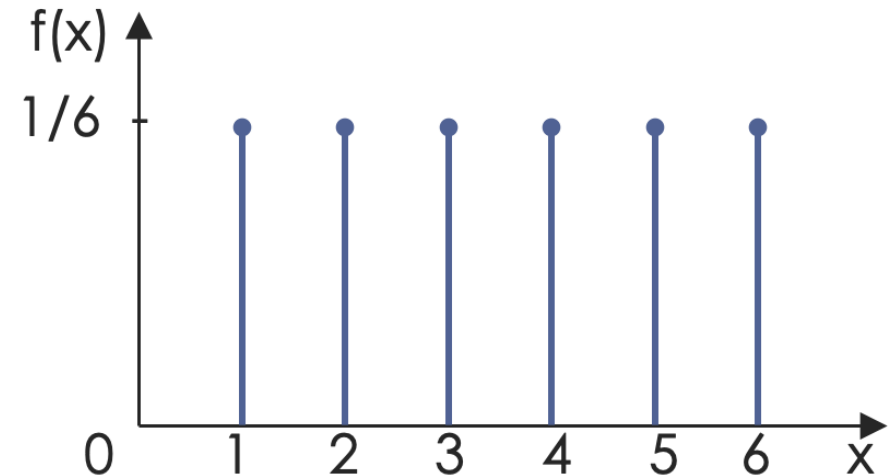
Örnek: Düzgün altı yüzlü bir zar bir kez atılıyor. Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulalım.

Bu deney için örnek uzay $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere;

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$f(x) = P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

veya,

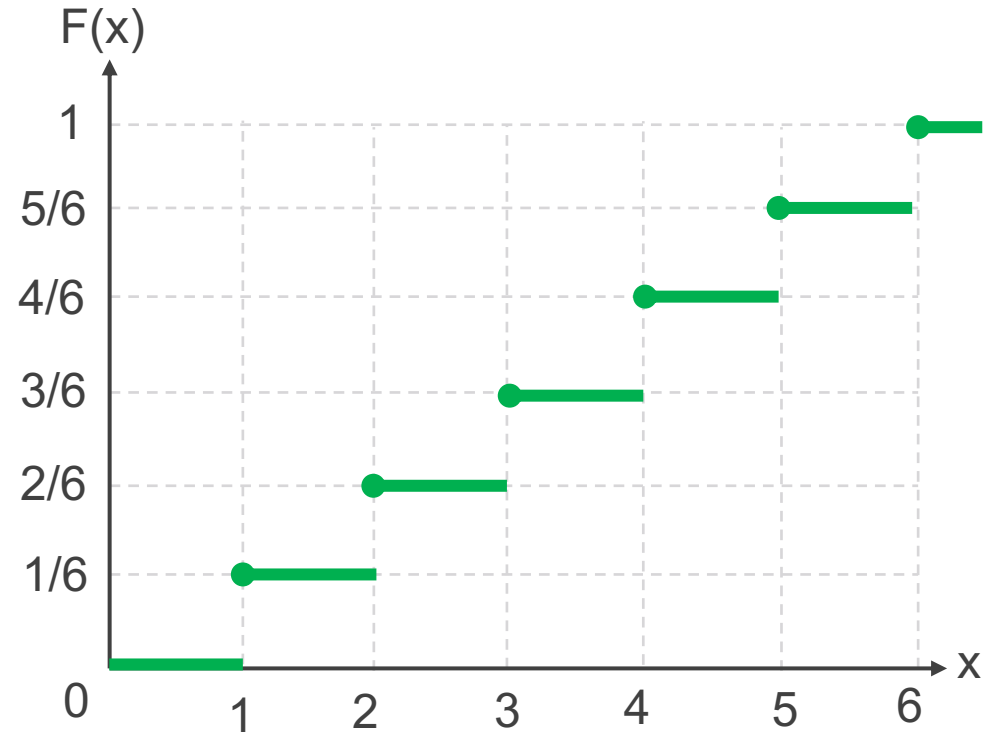
$f(x)=1/6, x=1,2,3,4,5,6$ şeklinde de yazılabilir.



Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

X rassal değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ ise,} \\ \frac{j}{6}, & j \leq x < j + 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, & x \geq 6 \text{ ise.} \end{cases}$$



Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

Örnek: Kesikli bir X rassal değişkeni için aşağıdaki olasılık dağılımı verilmiştir.

$X = x$	-3	0	2	3
$f(X) = P(X=x)$	0,2	0,1	0,4	c

a) C değerini bulunuz.

➤ $0,2 + 0,1 + 0,4 + c = 1$ olduğundan $c = 0,3$ olarak bulunur.

b) X hangi değeri en büyük olasılıkla alır?

➤ 2 değerini en büyük olasılıkla alır.

c) $P(X>0)$ olasılığını bulunuz.

➤ $P(X>0) = P(X=2) + P(X=3) = 0,4 + 0,3 = 0,7$

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

$X = x$	-3	0	2	3
$f(X) = P(X=x)$	0,2	0,1	0,4	c

d) $X = -2$ olma olasılığı nedir?

➤ $P(X = -2) = 0$ 'dır.

e) X 'in dağılım fonksiyonunu bulunuz.

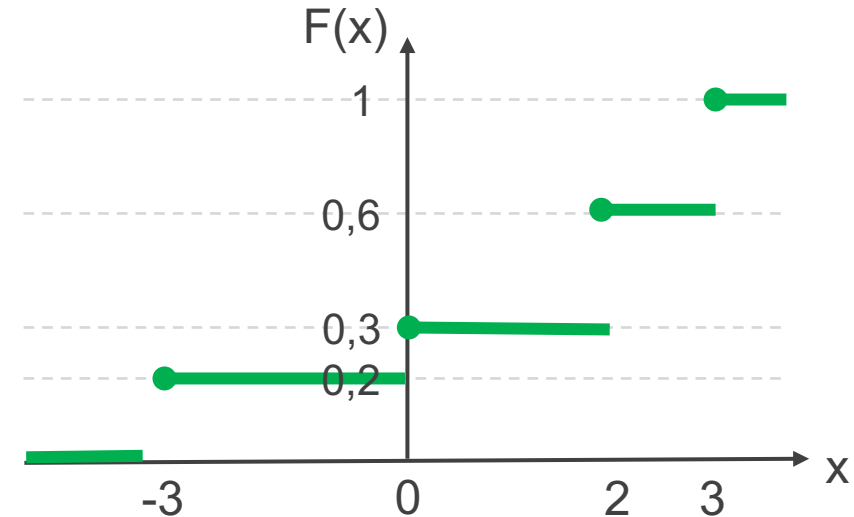
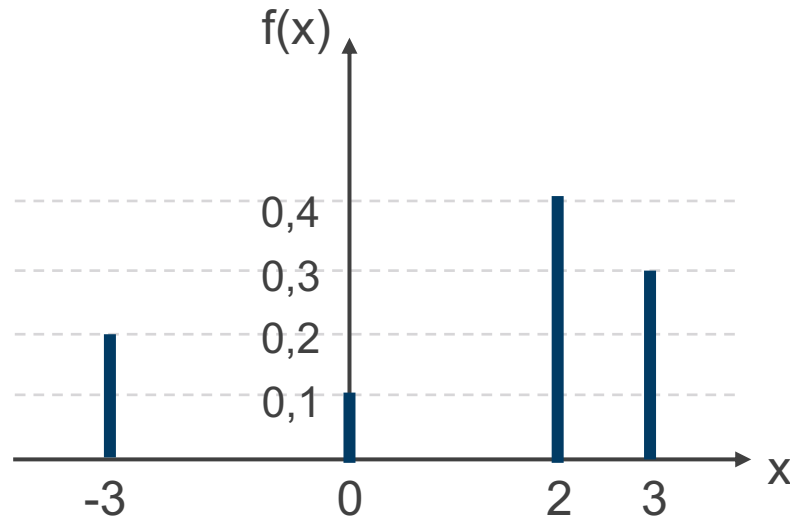
$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < -3 \\ 0,2 & ; & -3 \leq x < 0 \\ 0,3 & ; & 0 \leq x < 2 \\ 0,7 & ; & 2 \leq x < 3 \\ 1 & ; & x \geq 3 \end{cases}$$

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

f) $F(X)$ 'i tablo olarak gösteriniz.

$X = x$	-3	0	2	3
$F(X) = P(X \leq x)$	0,2	0,3	0,7	1

g) $f(x)$ ve $F(X)$ 'in grafiklerini çiziniz.



Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

Tanım: X , sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ değerlerini alan kesikli bir rassal değişken olsun. Bu değerlere karşılık gelen olasılıklar $f(x_i) = P(X=x_i)$, $i=1,2, \dots, N, \dots$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkeninin olasılık dağılımı ya da olasılık fonksiyonu denir.

➤ $f(x) \geq 0$, tüm x 'ler için,

➤
$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$$

$X = x$	x_1	x_2	
$P(X=x) = f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	

Kesikli Rassal Değişkenin Dağılımı

Örnek: Bir para tura gelinceye kadar atılıyor. X , gereken atışların sayısını gösteren rassal değişken olsun. X 'in olasılık fonksiyonunu bulunuz.

1. Atış	T	$1/2$
2. Atış	YT	$1/2 * 1/2$
3. Atış	YYT	$1/2 * 1/2 * 1/2$
...	...	...
N. Atış	YY..YT	$1/2^N$
...	...	...

Buna göre X 'in olasılık fonksiyonu;

$X = x$	1	2	...	x	...
$f(x) = P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$		$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, \dots$$

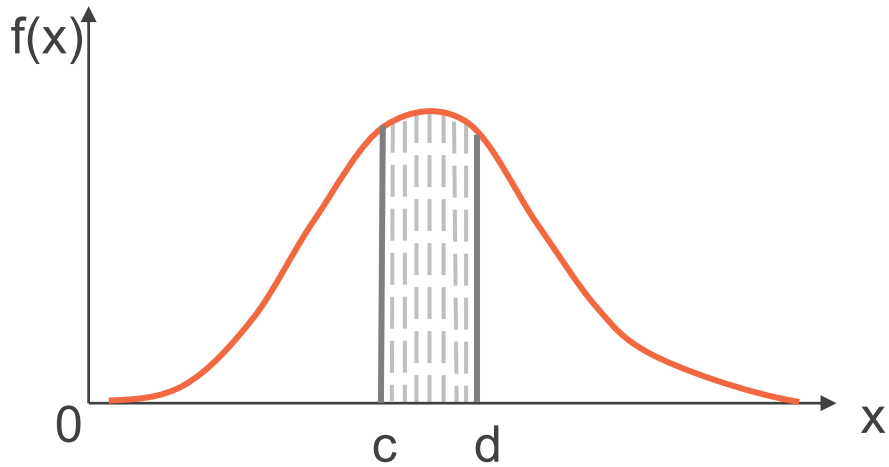
Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Tanım: X , $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rassal değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir;

➤ $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$

➤ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı



$f(x)$ eğrisi altında kalan ve x eksenini ile sınırlanan alan 1'e eşittir.

- X rassal değişkeninin c ve d arasında bulunma olasılığı $P(c < X < d)$ 'dir ve şu şekilde hesaplanır;

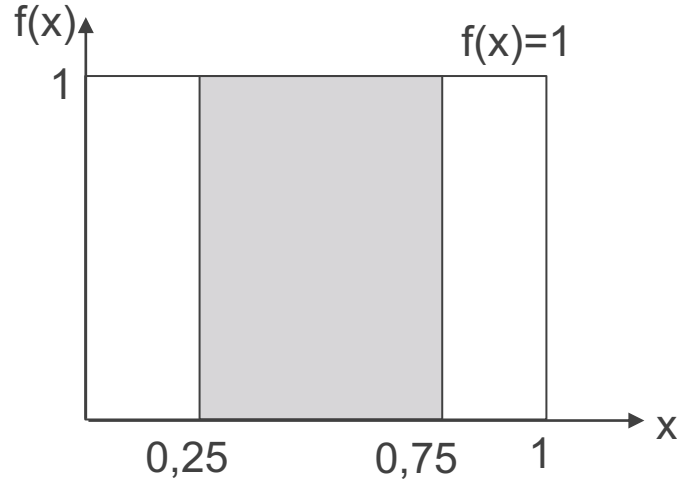
$$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx$$

- $P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d)$ olduğu unutulmamalıdır.
- X rasgele değişkeninin belli bir x değeri alması sıfırdır, yani $P(X=x) = 0$ 'dır.

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

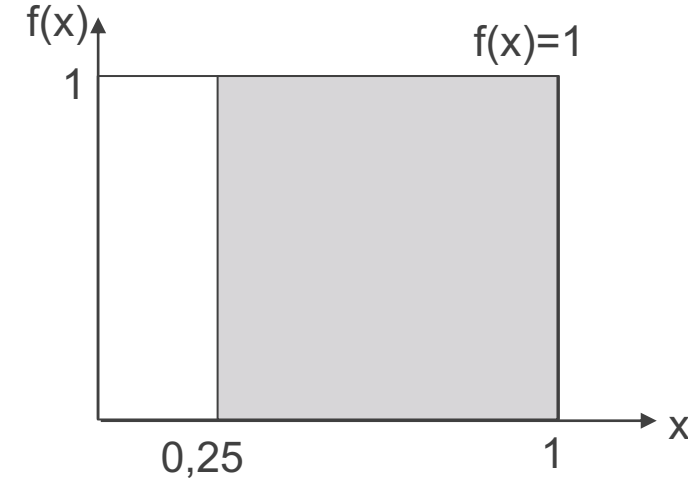
Örnek: $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ olarak olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir. Aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

a) $P(0,25 < X < 0,75) = ?$



$$P(0,25 < X < 0,75) = 1 * 0,5 = 0,5$$

b) $P(X > 0,25) = ?$

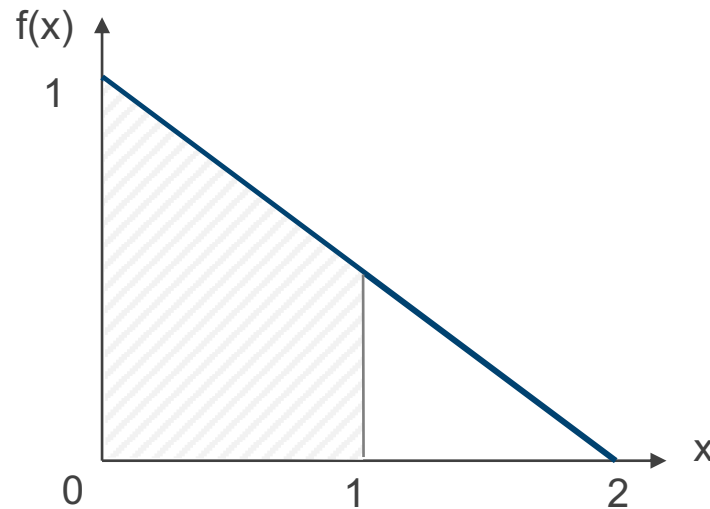


$$P(X > 0,25) = 1 * 0,75 = 0,75$$

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Örnek: X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x) = 1 - x/2$; $0 < x < 2$ olduğuna göre;

a) $P(0 < x < 1) = ?$



$P(0 < x < 1)$ taralı yamuğun alanına eşittir.

$$P(0 < x < 1) = \left(\frac{1 + 0,5}{2} \right) * 1$$
$$= 0,75$$

b) $P(1 < x < 2) = ?$

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

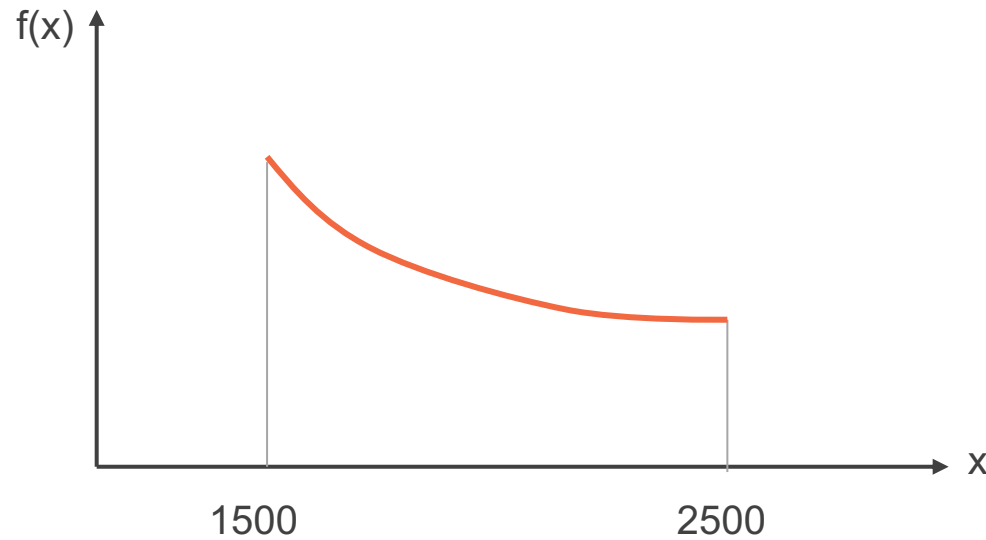
Örnek: Belli bir tipteki elektrik lambalarının dayanma süreleri (saat olarak) X olsun. X sürekli bir rassal değişken olmak üzere X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & ; 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & ; x < 1500 \text{ veya } x > 2500 \end{cases}$$

Şeklinde verilmiştir. Buna göre a 'yı bulunuz.

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Çözüm:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3} dx = 1$$

$$a * \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2500^2} - \frac{1}{1500^2}\right) = 1$$

$$a = 7.031.250$$

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Tanım: X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olsun. X 'in dağılım fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$$

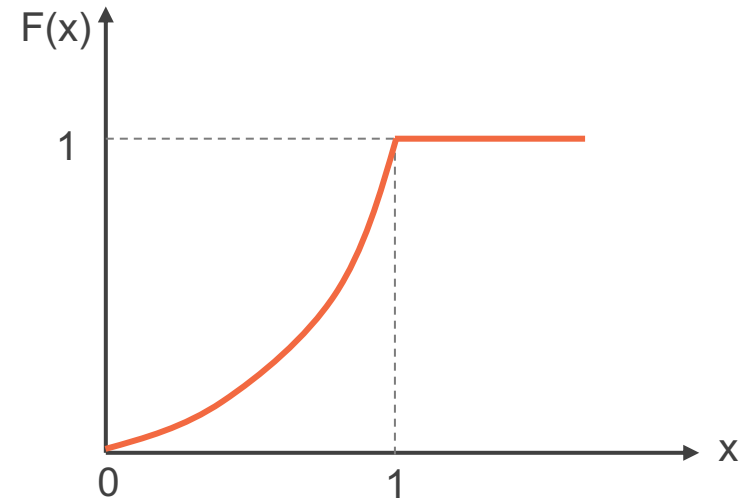
Not: X sürekli bir rassal değişken ise, F fonksiyonu da bütün x değerleri için süreklidir.

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Örnek: X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Buna göre X 'in birikimli dağılım fonksiyonunu (dağılım fonksiyonu) bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{aralığın dışında} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ \int_0^x 2x \cdot dx = x^2 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Teorem:

- F azalmayan bir fonksiyondur. Yani $x_1 < x_2$ ise $F(x_1) \leq F(x_2)$ 'dir.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(X) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$
(Genellikle $F(-\infty) = 0$ ve $F(+\infty) = 1$ şeklinde yazılır).
- $f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ ve $a \geq b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ 'dır.

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

Örnek: X sürekli bir rassal değişken olup olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir:

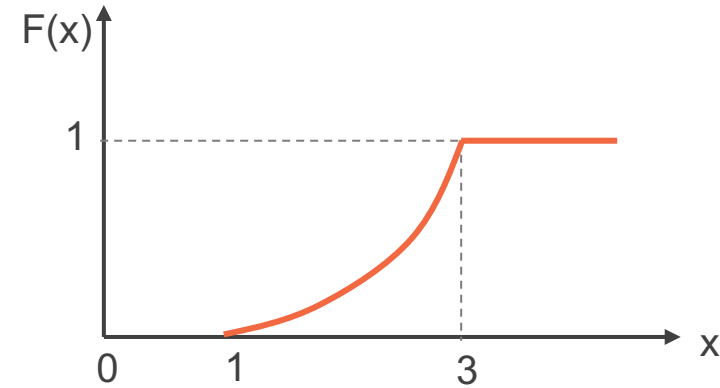
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x + 1), & 1 < x < 3 \\ 0 & , \text{ aralığın dışında} \end{cases}$$

- a) X rassal değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.
- b) $P(1 \leq X \leq 2)$ olasılığını bulunuz.
- c) $P(X \leq 2)$ olasılığını bulunuz.

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{12}(x^2 + 2x - 3) & ; \quad 1 < x < 3 \\ 1 & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$



$$b) P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{6}(x + 1)dx = \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{12} = 0,416$$

İkinci Yol: Olasılık dağılım fonksiyonu kullanılarak da çözülebilir,

$$P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{12}(2^2 + 2(2) - 3) - \frac{1}{12}(1^2 + 2(1) - 3) = \frac{5}{12}$$

Sürekli Rassal Değişkenin Dağılımı

$$c) P(X \leq 2) = F(2)$$

$$= \frac{1}{12} (2^2 + 2(2) - 3) = 5/12$$

Sorunuz?