



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-I / Kümeler & Örnek Uzay

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Küme Kavramı

Belirlenmiş bir evrendeki nesnelerin iyi tanımlanmış bir koleksiyonuna **küme** denir.

Bir kümenin herhangi bir üyesine **kümenin elemanı** veya **üyesi** denir.

Kümenin elemanları (öğeleri) sonlu sayıda ise **sonlu küme** denir.

Kümenin elemanları (öğeleri) sonsuz sayıda ise **sonsuz küme** denir.

Küme Gösterimi

1. Açık Gösterim (Liste Yöntemi): Küme elemanlarının $\{ \}$ şeklindeki parantez içine sıra gözetmeden, aralarına virgül koyularak yazılmasıdır.

Örnek: Haftanın P ile başlayan günlerinin kümesi A olmak üzere;

$$A = \{\text{Pazartesi, Perşembe, Pazar}\}$$

Örnek: Zar yüzeyindeki tek sayılar kümesi B olmak üzere;

$$B = \{1, 3, 5\}$$

Küme Gösterimi

2. Genel Gösterim (Ortak Özellik Yöntemi): Kümenin elemanları ortak bir özelliğe sahipse, bu özelliğin tanımlanması yoluyla küme gösterimidir.

Örnek: Altı yüzlü bir zardaki sayılar: 1, 2, 3, 4, 5, 6 olmak üzere;

$$A = \{x \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{x \mid x \leq 6, x \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$A = \{x : x \leq 6, x \in \mathbb{Z}^+\}$$

Örnek: $B = \{1, 9, 25\}$ ise;

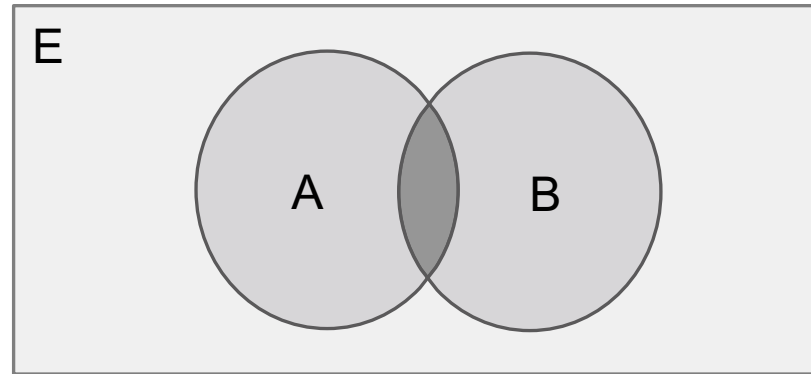
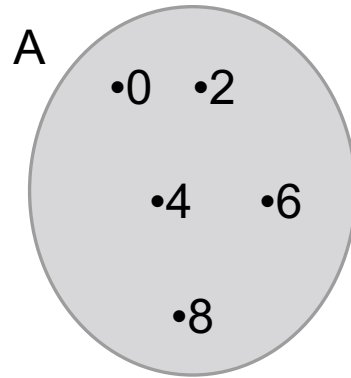
$$B = \{x^2 \mid x = 1, 3, 5\} \text{ şeklinde gösterilebilir.}$$

Küme Gösterimi

Örnek: Sınıfta isimleri E ile başlayan öğrencilerin kümesi A olsun.

Küme Gösterimi

3. Venn Şeması Yöntemi: Kümeyi oluşturan nesnelerin kapalı bir geometrik şekil içinde nokta veya sembol ile yazılım şeklidir.



Özel Kümeler

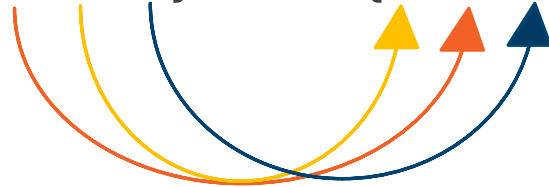
1. Boş Küme: Elemanı olmayan kümeye denir ve $\emptyset$ veya $\{ \}$ ile gösterilir.

Örnek: $x^2 - 2 = 0$ denkleminin tam sayı olan çözümler kümesi A ol. üz;

$$A = \{x \mid x^2 = 2, x \text{ tam sayıdır}\} \rightarrow A = \emptyset$$

2. Özdeş Kümeler: A ve B gibi iki küme aynı elemanlara sahip ise bu kümeler özdeş kümelerdir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 1, 3\}$ ise A ve B özdeş kümelerdir.



Özel Kümeler

3. Alt Küme: Bir A kümesinin her bir elemanı, B kümesinin de elemanı ise, A 'ya B 'nin **alt kümesi** denir ve $A \subset B$ veya $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda B kümesi A kümesini **kapsar** da denilebilir ve $B \supset A$ veya $B \supseteq A$ şeklinde gösterilir.

- Boş küme $\emptyset$, her kümenin alt kümesidir.
- $A \subset A$
- $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ 'dir.
- $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ 'dir.

Özel Kümeler

4. Evrensel Küme: Üzerinde çalıştığımız kümelerin her birini alt küme kabul eden daha geniş kümeye denir ve **E** ile gösterilir.

5. Kuvvet Kümesi: Bir A kümesinin alt kümelerinin kümesine A 'nın kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ ile gösterilir.

Özel Kümeler

Örnek: $E = \{a, b, c\}$ ile evrensel kümeyi gösterelim.

Kümeler Üzerinde İşlemler

1. Kesişim Kümesi: A ve B kümelerinin ikisinin de ortak elemanlarından oluşan kümeye denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$$

2. Ayırık Kümeler: Ortak elemanları olmayan A ve B kümelerine ayırık küme denir. $A \cap B = \emptyset$ ile gösterilir.

3. Birleşim Kümesi: A ve B küme elemanlarının bir araya getirilmesiyle oluşan kümeye A ve B'nin birleşimi denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$$

Kümeler Üzerinde İşlemler

4. Tümleyen: Bir A kümesinin tümleyeni A kümesinde bulunmayan, E içinde tüm elemanların kümesidir. A' ile gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$A' = \{ x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A \}$$

5. Fark Kümesi: A ve B kümeleri verildiğinde, A 'da olup B 'de olmayan nesnelerin oluşturduğu kümeye A ile B 'nin fark kümesi denir. $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir ve şu şekilde ifade edilir;

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$$

E evrensel kümesinin
alt kümeleri olan A, B
ve C kümeleri şu
özellikleri sağlarlar.

	Birleşim	Kesişim
Özdeşlik	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup E = E$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap E = A$
Tümlleme	$A \cup A' = E$ $(A')' = A$	$A \cap A' = \emptyset$
Değişme	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Birleşme	$(A \cup B) \cup C =$ $A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C =$ $A \cap (B \cap C)$
Dağılma	$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Kümeler Üzerinde İşlemler

Örnek: Bir zar atıldığında aşağıdaki kümeleri düşünelim.

Kümeler için geçerli
olan diğer özellikler
şu şekildedir;

- $A \subset (A \cup B)$ ve $(A \cap B) \subset A$
- $A \subset B$ ise $A = A \cap B$ ve $B = A \cup B$
- $C \subset A$ ve $C \subset B$ ise $C \subset A \cap B$
- $A \subset C$ ve $B \subset C$ ise $A \cup B \subset C$
- $A \subset B$ ise $A \cap C \subset B \cap C$
- $A \subset B$ ise $A \cup C \subset B \cup C$
- $A \cap B = \emptyset$ ve $C \subset A$ ise $C \cap B = \emptyset$
- $A \subset B$ ise $B' \subset A'$
- $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$ ve $A \cap (A' \cap B) = \emptyset$
- $(A \cap A') \cup B = B$ ve $(A \cup A') \cap B = B$

Kümeler Üzerinde İşlemler

- n pozitif tamsayı ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ ler verilmiş kümeler olsun. Verilen tüm kümelerin kapsadığı öğelerin kümesini $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ve kümelerin en az birinin öğelerini kapsayan kümeyi $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ olarak gösterelim.
- $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'$
- $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n'$
- $A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = (A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \dots \cap (A \cup A_n)$
- $A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \dots \cup (A \cap A_n)$

Kümeler Üzerinde İşlemler

Örnek: $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B)' \cap C'$ eşitliğini ispatlayalım.

Örnek Uzay, Örnek Noktalar ve Olaylar

Bir deneyin tüm olanaklı sonuçlarının kümesine **örnek uzay** denir ve **S** ile gösterilir.

S örnek uzayındaki her bir elemana **örnek nokta** denir.

Herhangi bir deney için S örnek uzayının bir alt kümesine **olay** denir.

Örnek Uzay ve Örnek Noktalar

- Bir zarın atılması deneyinde örnek uzay;

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ 'dır.}$$

- Bir paranın tek seferlik atılışı için örnek uzay;

$$S = \{\text{Yazı, Tura}\} \text{ 'dır.}$$

- Alfabeden rasgele bir harf seçmek istenirse örnek uzay;

$$S = \{A, B, C, \dots, Z\} \text{ 'dir.}$$

- Rasgele seçilen bir insanın boy ölçümü için örnek uzay;

$$S = \{x \mid x > 0\} \text{ 'dır.}$$

Örnek Uzay ve Örnek Noktalar

Örnek: 25, 50 ve 100 Kuruşluk üç paranın atılması deneyini ele alalım.

Örnek Uzay ve Örnek Noktalar

Örnek: İki zarın beraber atılması sonucunda oluşan bir deneyin örnek uzayını oluşturalım.

Olaylar

- Bir Olay, S örnek uzayının alt kümesi olduğundan, S 'nin kendisi ve $\emptyset$ 'de birer olaydır. S 'ye **kesin olay**; $\emptyset$ 'ye **olanaksız olay** denir.
- Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaya **rasgele olay** denir.
- Aynı anda elde edilemeyen A ve B gibi iki olaya **ayrık olaylar** denir.
 $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olayları ayrık olaylardır.

Sayma Kuralları

1. Toplama Kuralı: İki işlem düşünelim ve iki işlem ayrık olay olsun. İlk işlem N_1 farklı şekilde, ikincisi N_2 farklı şekilde yapılabiliyorsa, işlemlerin biri veya diğeri $N_1 + N_2$ farklı şekilde yapılabilir.

$$S(N_1 + N_2 + \dots + N_n) = S(N_1) + S(N_2) + \dots + S(N_n)$$

Örnek: Bir zar atma deneyinde kaç farklı şekilde çift yada tek sayı elde edilir?

$$\text{Tek sayı} = \{1, 3, 5\} = 3$$

$$\text{Çift sayı} = \{2, 4, 6\} = 3$$

$$3 + 3 = 6 \text{ (Toplama Kuralı)}$$

Sayma Kuralları

2. Çarpım Kuralı: İki işlem düşünelim. İlk işlem N_1 farklı şekilde yapılabilirse ve ilk işlem bu yollardan herhangi biriyle yapıldıktan sonra, ikinci işlem N_2 farklı şekilde yapılabilirse, bu iki işlem birlikte $N_1 \cdot N_2$ farklı şekilde yapılır.

$$S(N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n) = S(N_1) \times S(N_2) \times \dots \times S(N_n)$$

Örnek: Bir paranın üç kere atılması deneyinde örnek uzaydaki noktaların sayısı;

$N_1 = 2$; $N_2 = 2$; $N_3 = 2$ olmak üzere; $2 \times 2 \times 2 = 8$ 'dir.

Örnek: İki zarın peş peşe atılması deneyinde örnek uzaydaki noktaların sayısı;

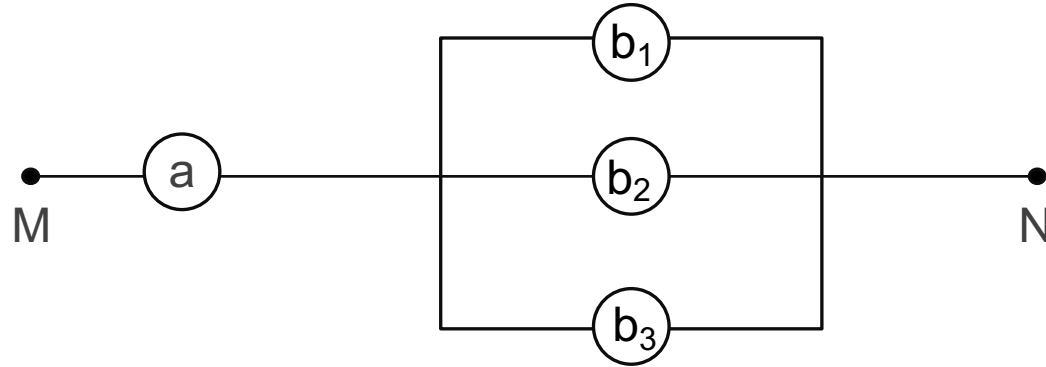
$N_1 = 6$; $N_2 = 6$ olmak üzere; $6 \times 6 = 36$ 'dır.

Alıştırma Soruları

Örnek: A olayı bir kutudaki dört parçadan en az birinin kusurlu olması, B olayı en az ikisinin kusurlu olması ise, A' ve B' tümleyenlerini bulunuz.

Alıştırma Soruları

Örnek: M ve N noktaları arasında elektrik devresini gösteren şema aşağıdaki gibidir. a aletinin bozuk olması olayı A, b_k aletinin ($k=1,2,3$) bozuk olma olayı B_k olsun. M ve N noktaları arasındaki devrenin kesik olması olayı C ise C ve C' yi yazınız.



Alıştırma Soruları

Örnek: $(X \cup A)' \cup (X \cup A')' = B$ eşitliğinde X rasgele olayını bulunuz.

Alıştırma Soruları

Örnek: Bir bölgedeki üç çocuklu ailelerde kız ve erkek çocuk dağılımlarını bulmak için bölgedeki aileler üzerinde inceleme yapılmıştır. Üç çocuklu aileler kitlesinden bir ailenin seçilmesi deneyi için örnek uzayını bulunuz.

Alıştırma Soruları

Örnek: 1, 2, 3, 4 sayıları dört ayrı kağıt parçası üzerine yazılarak bir torbanın içine atılıyor. Gözleri bağlanmış bir şahıs biri diğerinden sonra olmak üzere geriye atılmaksızın iki kağıt parçası çekiyor. Bu deney için örnek uzayı yazınız.

Alıştırma Soruları

Örnek: Bir atış poligonu yarıçapları r_k ($r_k > r_{k-1}$ ve $k=1, 2, \dots, 10$) olan aynı merkezli 10 çemberden oluşuyor. r_k yarıçaplı çemberin içine vurma olayı A_k olsun. Aşağıdaki olayların anlamını açıklayınız.

a) $B = \bigcup_{k=1}^6 A_k$

b) $B = \bigcap_{k=5}^{10} A_k$

Alıştırma Soruları

Örnek: A, B ve C örnek uzayda üç olay olsun.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliğini ispatlayınız.

Dersin İşleyişi ile İlgili Öneriler?