



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



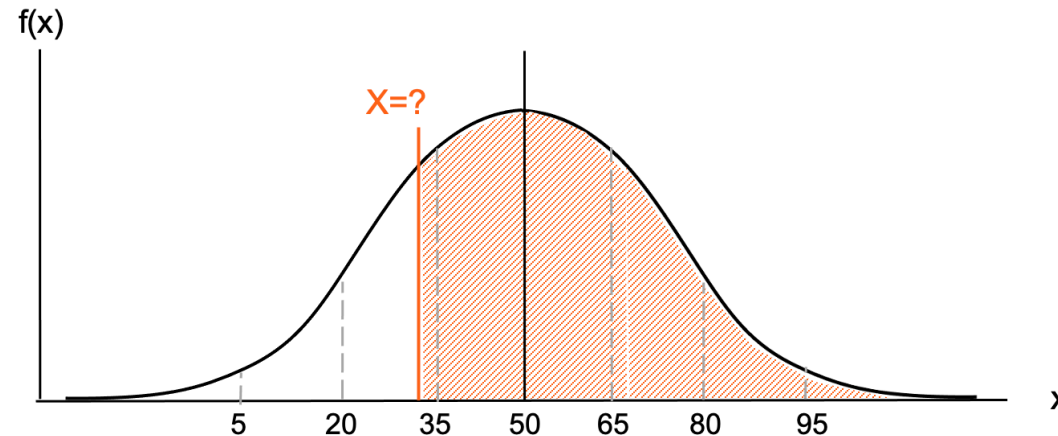
Mühendislik İstatistiği-I / Bazı Sürekli Olasılık Dağılımları-II

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Normal Dağılım

Örnek: İstatistik sınavında alınan notların, ortalaması 50 ve standart sapması 15 olan normal dağılıma uyduğu bilinmektedir. Sınıfın %16'sı dersi AA ile geçerken , %33'ü bu derste başarısız olmuştur.

- a) Dersi AA ile geçmek için alınması gereken en düşük not ne olmalıdır?
- b) Dersi geçmek için alınması gereken en düşük not ne olmalıdır?



Normal Dağılım

a) Dersi AA ile geçmek için alınması gereken en düşük not A olsun. Bu durumda;

$P(X \geq A) = 0,16$ olmak üzere;

$$P\left(Z \geq \frac{A - 50}{15}\right) = 0,16$$

$$P\left(Z \leq \underbrace{\frac{A - 50}{15}}\right) = 1 - 0,16 = 0,84$$

Tabloda 0,84 olasılık değerine karşılık gelen z değeri $\cong 0,99$

$$\frac{A - 50}{15} = 0,99 \rightarrow A = 64,85$$

Normal Dağılım

b) Dersi başarı ile geçmek için alınması gereken en düşük not C olsun. Bu durumda;

$P(X \leq C) = 0,33$ olmak üzere;

$$P\left(Z \leq \underbrace{\frac{C - 50}{15}}\right) = 0,33$$

Tabloda 0,33 olasılık değeri yok. Buna karşılık $1 - 0,33 = 0,67$ olasılık değerine denk gelen z değeri = 0,44 olmak üzere;

$$\frac{C - 50}{15} = -0,44 \quad \rightarrow \quad C = 43,4$$

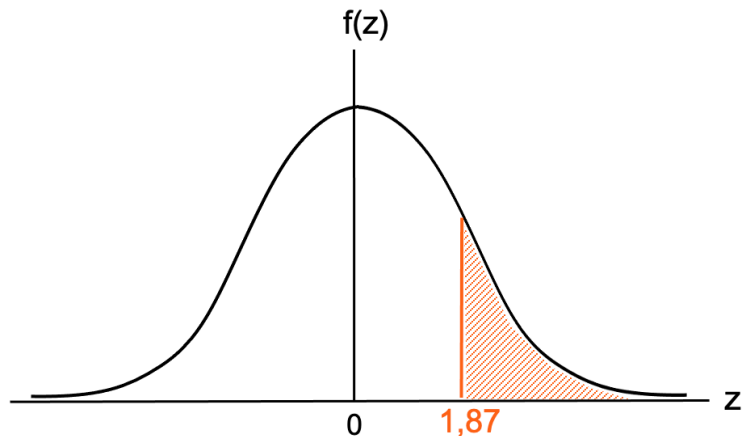
Normal Dağılım

Ödev: Bir firma tarafından üretilen hesap makinelerinin ömürleri 54 ay ortalama ve 8 ay standart sapmayla normal dağılmaktadır. Firma yetkilileri satışları artırmak için bir garanti süresi uygulamak istemektedir. Ancak garanti kapsamında değiştirilecek hesap makinesinin, toplam satışın % 1'inden daha fazla olmasını da istenmemektedir. Garanti uygulanacak bu süreyi bulunuz.

Normal Dağılım

Örnek: Bir salondaki insanların kiloları, ortalaması 75kg, standart sapması 8kg olan normal dağılıma uymaktadır. Bu insanlardan 12 tanesinin kilosu 90kg ve üzerinde olduğuna göre salonda kaç insan vardır?

$$Z = \frac{90 - 75}{8} = 1,87$$



$$\begin{aligned} P(Z \geq 1,87) &= 1 - P(Z \leq 1,87) \\ &= 1 - 0,9693 \\ &= 0,0307 \end{aligned}$$

→ %3'ü 12 kişi ise;
Salonun tamamı (%100'ü) = 400 kişidir.

Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

Hatırlatma: Binom dağılımında, p: Tek deneydeki başarı olasılığı, q: Başarısızlık olasılığı, n: Deney sayısı olmak üzere n adet bağımsız denemede x başarıya karşılık gelen olasılık dağılımı şu şekildeydi:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

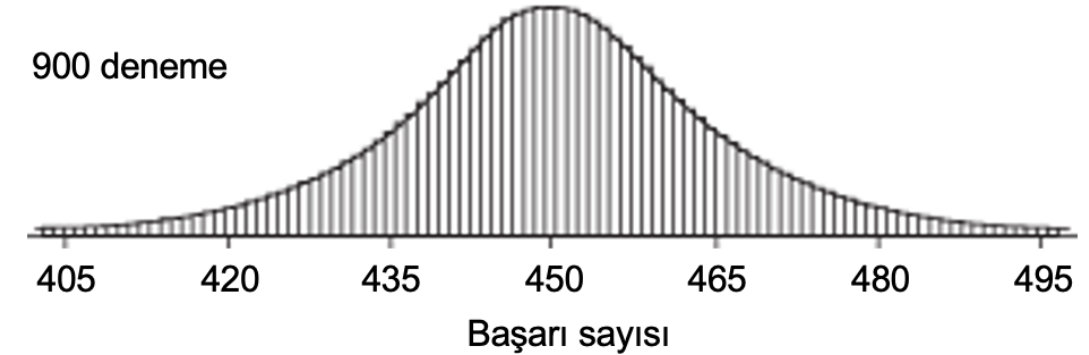
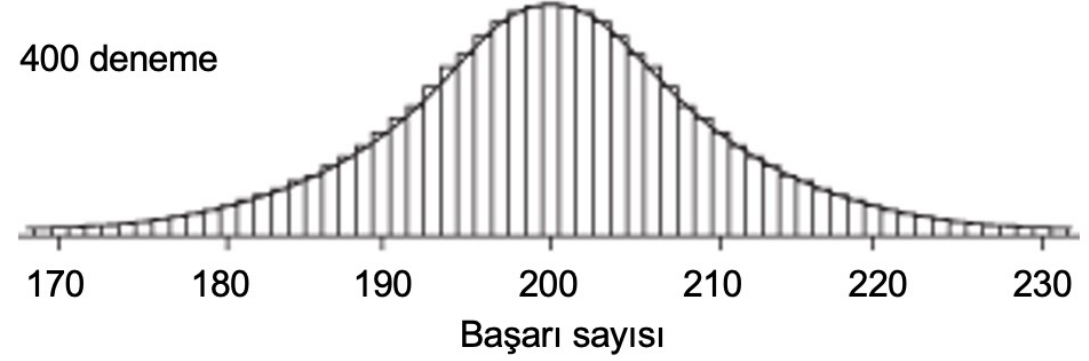
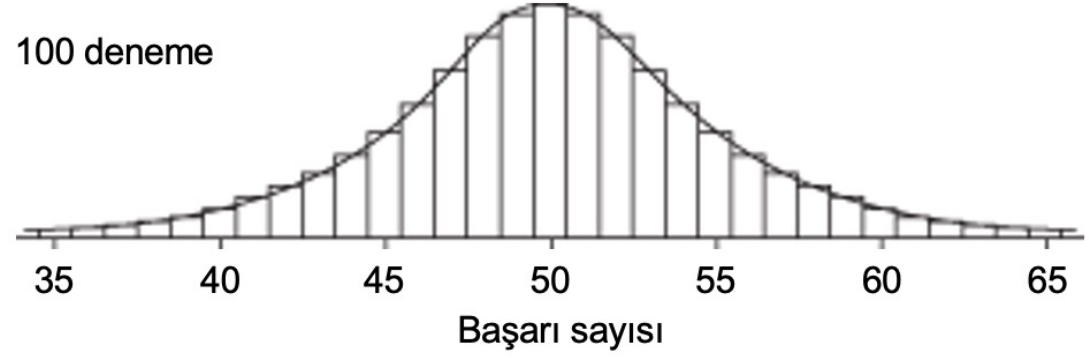
- Burada n deney sayısı büyüdükçe Binom dağılımı ile olasılık hesaplamak zorlaşacağı için Normal Dağılım ile yaklaşık sonuç bulunabilir. Bu aşamada;

$\mu = np$ ve $\sigma = \sqrt{npq}$ olmak üzere

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \text{ dönüşümü kullanılır.}$$

➤ n büyük bir değer ise ve p 'nin değeri 0,5'e yakın ise binom dağılımına normal dağılım yaklaşımı oldukça iyi sonuç verecektir.

➤ p 'nin değeri 0 veya 1 e yakınsa, verilmiş herhangi bir n değeri için normal yaklaşım fazla iyi çözüm vermeyecektir.



Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

Tanım: Binom kesikli dağılımı için gerekli hesaplamada sürekli bir dağılım olan Normal Dağılım yaklaşımını kullanılacağı zaman süreklilik için düzeltme yapılması gerekir. Bu amaçla 1/2 (0,5) süreklilik düzelticisi kullanılır. Süreklilik düzeltilmesi sonrası standart normal değişken şu şekilde hesaplanır:

$$P(X \leq x) \cong P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(X < x) \cong P\left(Z \leq \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

Örnek: 100 soruluk bir doğru/yanlış sınavında bir öğrencinin 50 ile 60 arasında (50 ve 60 dahil) soruyu doğru tahmin etmesinin olasılığı nedir?

$$P(50 \leq X \leq 60) = ?$$

$n = 100$; $p = 0,5$; $q = 0,5$ olmak üzere;

$$\mu = np = 100 * 0,5 = 50$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0,5 * 0,5} = 5$$

$$Z_1 = \frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - \frac{1}{2} - 50}{5} = -0,1$$

$$Z_2 = \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 + \frac{1}{2} - 50}{5} = 2,1$$

Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

$$\begin{aligned}P(50 \leq X \leq 60) &= P(-0,1 \leq Z \leq 2,1) \\&= P(Z \leq 2,1) - P(Z \leq -0,1) \\&= P(Z \leq 2,1) - [1 - P(Z \leq 0,1)] \\&= 0,9821 - [1 - 0,5398] \\&= 0,5219\end{aligned}$$

Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

Örnek: Bir basketbol oyuncusu serbest atışların ortalama olarak %60'ında sayı elde edebiliyor. Bir sene boyunca 100 atış yapan bu oyuncunun,

a) 70 veya daha çok sayı elde etme olasılığı nedir?

b) Tam 60 sayı elde etme olasılığı nedir?

- $n = 100$; $p = 0,6$; $q = 0,4$ olmak üzere
- $\mu = np = 100 * 0,6 = 60$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0,6 * 0,4} = \sqrt{24} = 4,9$

Binom Dağılımına ND Yaklaşımı

$$\begin{aligned}\text{a) } P(X \geq 70) &= P\left(Z \geq \frac{70 - \frac{1}{2} - 60}{4,9}\right) = P(Z \geq 1,93) = 1 - P(Z \leq 1,93) \\ &= 1 - 0,9732 = 0,0268\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } P(X = 60) &= P\left(\frac{60 - \frac{1}{2} - 60}{4,9} \leq Z \leq \frac{60 + \frac{1}{2} - 60}{4,9}\right) \\ &= P(-0,1 \leq Z \leq 0,1) \\ &= P(Z \leq 0,1) - P(Z \leq -0,1) = P(Z \leq 0,1) - [1 - P(Z \leq 0,1)] \\ &= 0,5398 - [1 - 0,5398] = 0,0796\end{aligned}$$

Poisson Dağılımına ND Yaklaşımı

Hatırlatma: Sürekli bir uzayda x tekrarının gözlenme olasılığı olmak üzere X kesikli rasgele değişkeni için Poisson dağılımının olasılık fonk. şu şekildedir:

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- x tekrar sayısının çok büyük olması durumunda ($x > 30$) Poisson dağılımı ND yaklaşımı ile yaklaşık olarak çözülebilir. Burada $\mu = \lambda$; $\sigma = \sqrt{\lambda}$ ve 0,5 süreklilik düzeltmesi kullanılarak standart normal dağılım değişkeni Z ;

$$P(X \leq x) \cong P\left(Z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ ile hesaplanır.}$$

Poisson Dağılımına ND Yaklaşımı

Örnek: Radyoaktif bir maddenin parçalanma sayısı saniyede ortalama 25 ise, ele alınan bir parçalanma sayısının 23 – 27 arasında (23 ve 27 dahil) olma olasılığını bulalım.

➤ $\mu = \lambda = 25$; $\sigma = \sqrt{\lambda} = 5$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} P(23 \leq X \leq 27) &= P\left(\frac{x - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq z \leq \frac{x + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(\frac{22,5 - 25}{5} \leq z \leq \frac{27,5 - 25}{5}\right) \\ &= P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) \\ &= P(Z \leq 0,5) - [1 - P(Z \leq 0,5)] \\ &= 0,6915 - [1 - 0,6915] = 0,383 \end{aligned}$$