



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-II / İstatistiksel Tahmin 2

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Kitle Varyansı σ^2 için Aralık Tahmini

➤ σ^2 ve σ 'yı tahmin etmek istiyorsak, σ^2 'nın yansız bir tahmin edicisi olan S^2 'yi kullanarak bir aralık oluşturabiliriz.

➤ $X_1, X_2, \dots, X_n$ σ^2 varyanslı ND'lı bağımsız rassal değişkendir ve $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ ise,

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}$$

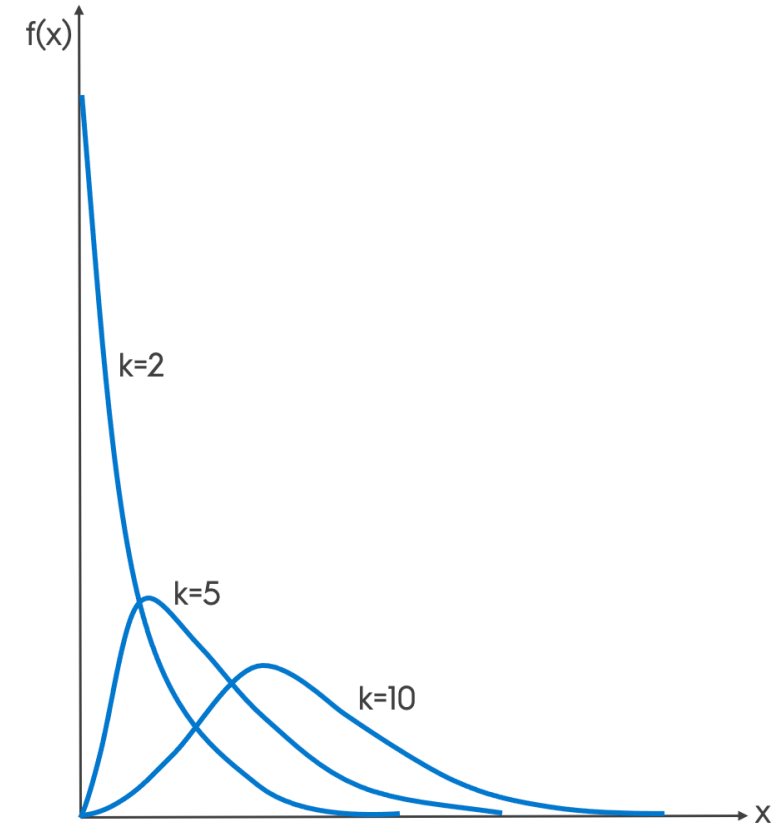
istatistiğine K-kare (Chi-square - χ^2) dağılımına sahip n-1 serbestlik dereceli χ^2 istatistiği denir.

χ^2 Dağılımı

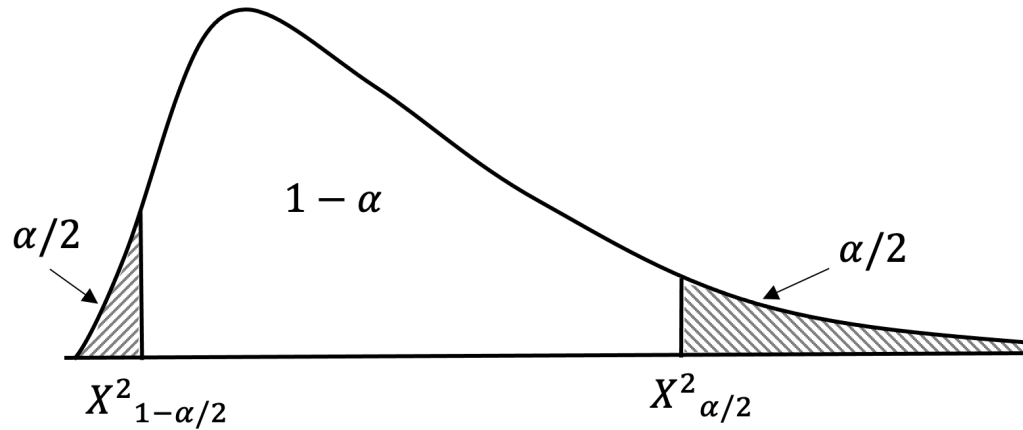
- χ^2 rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir.

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \quad x > 0$$

- k serbestlik derecesini göstermektedir.
- Dağılımın ortalaması k ; varyansı $2k$ 'dir.
- χ^2 dağılımı genellikle sağa çarpıktır. k arttıkça dağılım daha simetrik hale gelmeye başlar. Yani normal dağılıma benzerlik gösterir.



Kitle Varyansı σ^2 için Aralık Tahmini



χ^2 için $1 - \alpha$ düzeyinde bir güven aralığı;

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} < \chi^2_{n-1} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Şeklinde hesaplanır.

Buna göre $\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}$ 'yi kullanırsak;

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} < \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

σ^2 için $1 - \alpha$ düzeyinde bir güven aralığı;

$$P\left(\frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_x^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

olarak belirlenir.

Kitle Varyansı σ^2 için Aralık Tahmini

- Kitle varyansı için alt ve üst sınır $\left(\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} ; \frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \right)$ olduğuna göre, benzer bir şekilde kitle standart sapması σ için güven aralığını oluştururken aşağıdaki aralık kullanılır;

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} ; \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} \right)$$

σ^2 için Alt-Üst Güven Sınırı

➤ Kitle varyansı için alt güven sınırı:

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{\alpha}^2; n-1} < \sigma^2$$

➤ Kitle varyansı için üst güven sınırı:

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{1-\alpha}^2; n-1} > \sigma^2$$

Kitle Varyansı σ^2 için Aralık Tahmini

Örnek: Bir firmanın ürettiği reçel kutularından rastgele 10 kutu seçilmiş ve tartılarak ağırlıkları şöyle bulunmuştur:

X_i [gr]: 164, 161, 158, 170, 161, 159, 158, 169, 152, 160

Firma tarafından ihraç edilen bu reçel kutularının varyansı için %95'lik güven aralığını bulalım.

➤ $\bar{X} = \frac{1}{10} (164 + 161 + \dots + 160) = 161,2 \text{ gr.}$

➤ $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \bar{X})^2 = 28,6 \text{ gr}^2$

➤ Serbestlik Derecesi $k = 10 - 1 = 9$ olmak üzere;

$$\frac{(10 - 1)S_x^2}{\chi_{0,025;9}^2} < \sigma^2 < \frac{(10 - 1)S_x^2}{\chi_{0,975;9}^2} \Rightarrow \frac{9 * 28,6}{19,023} < \sigma^2 < \frac{9 * 28,6}{2,70} \Rightarrow 13,5 < \sigma^2 < 95,3$$

Kitle Varyansı σ^2 için Aralık Tahmini

Örnek: Denenen bir motorun 16 deneme sürüşündeki yakıt tüketimlerinin standart sapması 2,2 galondur. Motorun yakıt tüketiminin gerçek değişkenliğini ölçen anakütle varyansının %99 güven aralığını hesaplayalım.

➤ $n = 16$; $k = 16 - 1 = 15$

➤ $S_x^2 = (2,2)^2 = 4,84$ olmak üzere;

$$\frac{(16 - 1) * 4,84}{\chi_{0,005;15}^2} < \sigma^2 < \frac{(16 - 1) * 4,84}{\chi_{0,995;15}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{15 * 4,84}{32,80} < \sigma^2 < \frac{15 * 4,84}{4,60} \Rightarrow 2,21 < \sigma^2 < 15,78$$

$$P(2,21 < \sigma^2 < 15,78) = 0,99' \text{ dir.}$$

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

- Kitle oranı (π) için aralık tahmini yapılırken, kitle oranının yansız tahmin edicisi örnekleme oranı (p) kullanılır.
- Merkezi Limit Teoremi'ne göre oran için güven aralıkları oluşturulurken z-standart normal dağılımı kullanılır.
- p 'nin örnekleme dağılımının standart hatası:

$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ 'dir. Eğer örneklemdaki birim sayısı n yeterince büyük ise, σ_p

$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ yazılabilir.

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

Not: $n\pi \geq 5$ ise ya da π 'nin bilinmediği durumda tahmincisi olan $np \geq 5$ ise, 'n' büyük olarak düşünülür.

Bu durumda normal dağılım kullanılır. Örnek büyük olduğunda kitle oranı π için güven aralığı:

$$p \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p = p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \cong p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ ile hesaplanır.}$$

$$\Rightarrow p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$P\left(p - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

- Bazı durumlarda örneklemdaki birim sayısı küçük olabilir. Bu durumda $p^* = \frac{X+2}{n+4}$ olmak üzere, güven aralığı

$$p^* - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n+4}} < \pi < p^* + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n+4}}$$

ile hesaplanır. Burada p^* : Düzeltilmiş örnek oranıdır.

!! Burada alt limit 0'dan küçük çıkarsa 0 yazılır, benzer şekilde üst limit de 1'den büyük çıkarsa 1 yazılır.

Kitle Oranı π için Alt-Üst Güven Sınırları

➤ Kitle oranı için alt güven sınırı:

$$p - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi$$

➤ Kitle oranı için üst güven sınırı:

$$\pi < p + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

Örnek: 100 kişilik rasgele bir örnekte 25 kişinin solak olduğu bilinmektedir. Solakların gerçek oranı için %95 güven aralığını oluşturalım.

➤ $p = 25/100$

➤ $(1-p) = 75/100$

➤ $n = 100$

➤ $\alpha = 0,05$ ve $Z_{0,025} = 1,96$ olmak üzere;

$$p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0,25 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}} < \pi < 0,25 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{100}}$$

$$0,1651 < \pi < 0,3359$$

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

Örnek: 400 lise öğrencisinden oluşan bir örnekte 32 öğrenci üniversite sınavını kazanmıştır. Üniversite öğrencilerinin sınavı kazanma oranı için %95'lik güven aralığını bulunuz.

➤ $p = 32/400 = 0,08$; $(1-p) = 0,92$

➤ $\alpha = 0,05$ ve $Z_{0,025} = 1,96$ olmak üzere;

$$0,08 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,08 \cdot 0,92}{400}} < \pi < 0,08 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,08 \cdot 0,92}{400}}$$

➡ $0,053 < \pi < 0,106$

$$P(0,053 < \pi < 0,106) = 0,95$$

Kitle Oranı π için Aralık Tahmini

Örnek: Bir bölgede salgın hastalık tespit edilmiştir. Bölgeden rastgele seçilen 250 kişiden 3'ünün bu hastalığa yakalandığı belirlendiğine göre bu bölgedeki herkes için %95 güven düzeyinde hastalığa yakalanma oranını tahmin edelim.

➤ $n = 250$

➤ $p = 0,012$ olmak üzere $np < 5$ olduğu için; $p^* = \frac{X+2}{n+4} = \frac{3+2}{250+4} = 0,019$

$$p^* - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n+4}} < \pi < p^* + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n+4}}$$

➡ $0,019 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,019 \cdot 0,981}{254}} < \pi < 0,019 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,019 \cdot 0,981}{254}} = 0,0023 < \pi < 0,035$

Yani $P(0,0023 < \pi < 0,035) = 0.95$

Örneklem Büyüklüğü Ne Olmalı?

$$p - \underbrace{Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_e < \pi < p + \underbrace{Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_e$$

➡ Örneklem büyüklüğü $n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \cdot p(1-p)}{e^2}$ ile hesaplanır.

Örneklem Büyüklüğü Hesabı

Örnek: Bir fabrika müdürü yeni satın alınan bir makinanın ürettiği kusurlu (bozuk) ürünlerin oranını tahmin etmek istemektedir. 200 birimlik bir örneklem seçtiğinde ürünlerin %3'ünün kusurlu olduğu belirlenmiştir. Yığın oranı π 'nin p 'den 0,01 farklı bir aralıkta ve %99 güven düzeyinde oluşturulacak güven aralığını belirlemek için n ne olmalıdır?

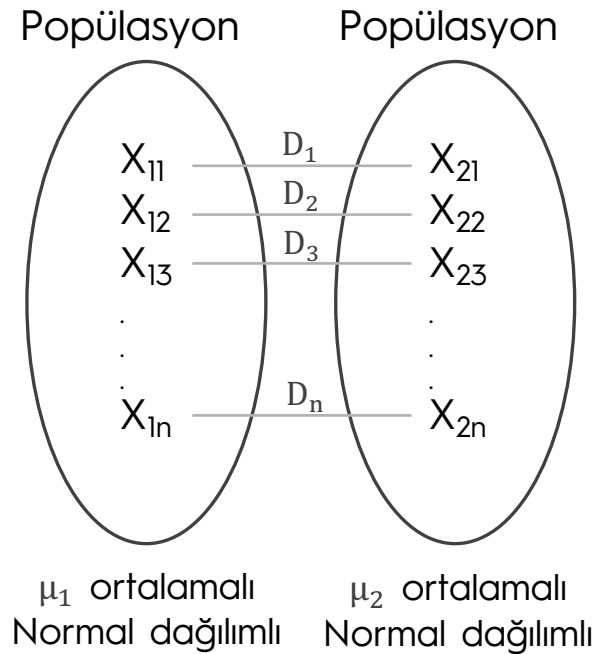
$$P(p - 0,01 < \pi < p + 0,01) = 0,99$$

Bu durumda $e = 0,01$; $p = 0,03$; $Z_{0,005} = 2,575$ olmak üzere

$$n = \frac{2,575^2 * 0,03 * 0,97}{0,01^2} = 1927 \text{ adet}$$

Ölçüm Çiftleri İçin Aralık Tahmini

➤ Pek çok durumda çiftler halinde elde edilen gözlemlere (eşleştirilmiş gözlemlere) dayanarak iki yığının ortalaması karşılaştırılmak istenebilir.



- $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ farkları $\mu_1 - \mu_2$ ortalamalı σ_D^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir.
- $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum D_i$ ise: $\bar{D}$, $\mu_{\bar{D}}$ ortalamalı σ_D^2/n varyanslı normal dağılıma sahiptir.
- Bu durumda $Z_D = \frac{\bar{D} - \mu_{\bar{D}}}{\sigma_D / \sqrt{n}}$ istatistiği geçerli olup standart normal dağılıma [$Z_D \sim N(0;1)$] sahiptir.

Ölçüm Çiftleri İçin Aralık Tahmini

Eğer σ^2 biliniyorsa güven aralığı

$$P\left[\bar{D} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} < (\mu_1 - \mu_2) < \bar{D} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

Eğer σ^2 bilinmiyorsa güven aralığı

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum (D_i - \bar{D})^2 \quad \text{ve} \quad t_D = \frac{\bar{D} - \mu_{\bar{D}}}{S_D/\sqrt{n}} \text{ olmak üzere}$$

$$P\left[\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} < (\mu_1 - \mu_2) < \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Ölçüm Çiftleri İçin Aralık Tahmini

Örnek: Bir ilacın kan basıncı üzerindeki etkisini incelemek için rasgele seçilen 12 kişinin ilacı kullanmadan önceki ve sonraki kan basınçları ölçülmüştür. Elde edilen ölçüm sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yığının (kitlenin) ilahtan önceki ve sonraki kan basınçlarının ortalamaları arasındaki fark için %95'lik güven aralığını bulunuz.

$X_{\text{önce}}$	120	124	130	118	140	128	140	135	126	130	126	127
X_{sonra}	128	131	131	127	132	125	141	137	118	132	129	135

Σ

$D = X_{\text{ö}} - X_{\text{s}}$	-8	7-	-1	-9	8	3	-1	-2	8	-2	-3	-8	-22
-----------------------------------	----	----	----	----	---	---	----	----	---	----	----	----	-----

D^2	64	49	1	81	64	9	1	4	64	4	9	64	414
-------	----	----	---	----	----	---	---	---	----	---	---	----	-----

Ölçüm Çiftleri İçin Aralık Tahmini

$$\bar{D} = \bar{X}_{\bar{o}} - \bar{X}_s = \frac{-22}{12} = -1,83$$

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (D_i - \bar{D})^2 = 33,97$$

$$S_D = \sqrt{33,97} = 5,83$$

$t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} = t_{0,025; 11} = 2,201$ olduğuna göre güven aralığı;

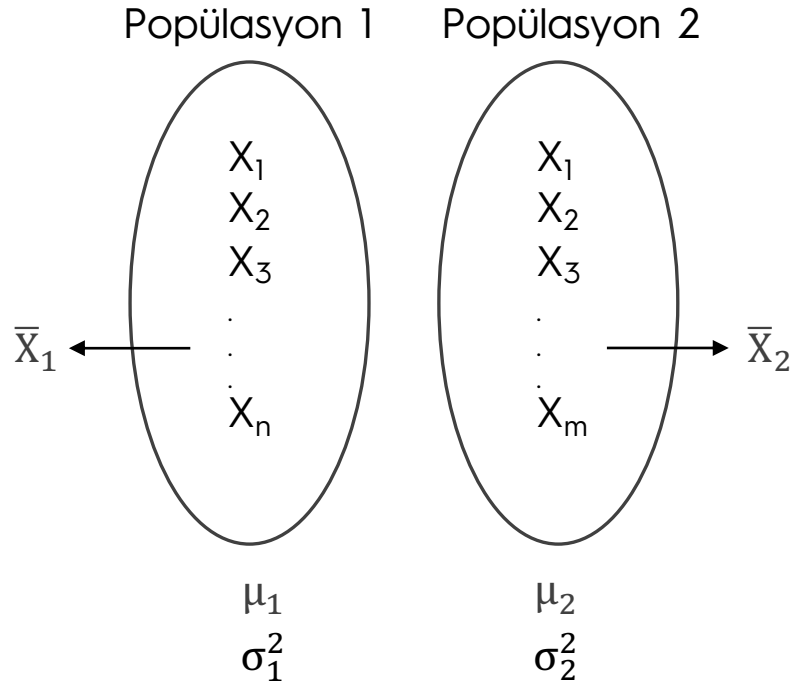
$$-1,83 - 2,201 \frac{5,83}{\sqrt{12}} < (\mu_{\bar{o}} - \mu_s) < -1,83 + 2,201 \frac{5,83}{\sqrt{12}}$$

➡ $-5,537 < (\mu_{\bar{o}} - \mu_s) < 1,87$

Diğer bir deyişle, $(\mu_s - \mu_{\bar{o}})$ farkı için %95'lik güven aralığı -1,87 ile 5,537 arasındadır.

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

Gerçek hayatta pek çok deneyde, özellikleri farklı iki kitlenin ortalamalarının karşılaştırılması istenir.



Bu karşılaştırma için 3 durum söz konusudur:

- Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyorsa
- Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyorsa ancak $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ise
- Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyorsa ve $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ise

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

1. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyor

Sırasıyla μ_1 ve μ_2 ortalamalı iki normal kitleden m ve n birimlik örneklem çektiğimizi varsayalım.

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \quad \text{olmak üzere ortalamalar farkı için güven aralığı;}$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

$$\text{Yine benzer şekilde } P\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right) = 1 - \alpha$$

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

2. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ancak $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ kabul ediliyor

σ_1^2 ve σ_2^2 sırasıyla S_1^2 ve S_2^2 yansız tahmin edicilerine sahip olsun. Bu durumda S_p^2 tahmin edicisi;

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \quad n+m-2 \text{ serbestlik dereceli } t \text{ istatistiği kullanılır. Bu durumda ortalama farkları için güven aralığı:}$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}; n+m-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}; n+m-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \quad \text{şeklinde hesaplanır}$$

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

3. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ve $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Kitle varyanslarının birbirinden farklı olduğu ve bilinmediği durumda t istatistiği;

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \text{ olmak üzere;}$$

$$v = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}\right]^2}{\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 (S_1^2)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2 (S_2^2)^2}{m-1}}$$

t istatistiğinin serbestlik derecesi şu şekilde hesaplanır. Bu durumda ortalama farkları için güven aralığı:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}; v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}; v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

Örnek: Bir şirket tarafından kullanılan demir, A ve B ile nitelendirilen iki farklı bölgeden çıkarılmaktadır. Demirin erime noktasını belirlemek amacıyla bu bölgelerden elde edilen örneklemelerin erime sıcaklıkları ölçülmüş ve aşağıdaki gibi bulunmuştur.

	$\bar{X}$										
A Bölgesi	1493	1519	1518	1512	1512	1514	1489	1508	1508	1494	1506,7
B Bölgesi	1509	1494	1512	1483	1507	1491					1499,3

Bu iki bölgeden elde edilen demirlerin varyansları $\sigma_A^2 = 100$ ve $\sigma_B^2 = 100$ olduğuna göre ortalamaları arasındaki fark için %95'lik güven aralığını bulalım.

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

Çözüm:

➤ $\bar{X}_A = 1506,7$; $\bar{X}_B = 1499,3$; $\bar{X}_A - \bar{X}_B = 7,4$; $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 100$ ol. üzere

$$\text{➤ } \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} = \sqrt{\frac{100}{10} + \frac{100}{6}} = \sqrt{26,67} = 5,16$$

➤ %95'lik güven aralığı için $Z_{0,025} = 1,96$

O halde A ve B bölgelerinden elde edilen demirlerin ortalamaları arasındaki fark için %95'lik güven aralığı:

$$7,4 - 1,96 * 5,16 < (\mu_A - \mu_B) < 7,4 + 1,96 * 5,16$$

$$-2,71 < (\mu_A - \mu_B) < 17,51$$

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

Örnek: Bir sınav döneminde istatistik dersinin sınavına giren öğrenciler arasından rasgele seçilen grupta 12'si kız 10'u erkek öğrenci bulunmaktadır. Kız öğrencilerin not ortalaması 85, standart sapması 4; erkek öğrencilerin not ortalaması 81, standart sapması 5'tir. μ_1 ve μ_2 sırasıyla bu sınava giren gereken tüm kız ve erkek öğrencilerin notlarının ortalaması ise, varyansları eşit olmak şartıyla kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları farkı için %90'lık güven aralığını bulalım.

➤ $n = 12$; $\bar{X}_1 = 85$; $S_1^2 = 16$

➤ $m = 10$; $\bar{X}_2 = 81$; $S_2^2 = 25$ olmak üzere

➤ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 4$ ve

$$S_p^2 = \frac{(12 - 1)16 + (10 - 1)25}{12 + 10 - 2} = 20,25$$

$$S_p = 4,478$$

İki Ortalamamanın Farkı İçin Aralık Tahmini

Çözüm:

$$\triangleright t_{\frac{\alpha}{2}; n+m-2} = t_{0,05; 20} = 1,725 \text{ ise}$$

Kız ve erkek öğrencilerin notları ortalamalarının farkı için güven aralığı:

$$4 - 1,725 * 4,478 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}} < (\mu_1 - \mu_2) < 4 + 1,725 * 4,478 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}$$

$$0,69 < (\mu_1 - \mu_2) < 7,31$$

Varyansların Oranı İçin Aralık Tahmini

➤ σ_1^2 ve σ_2^2 iki kitlenin bilinmeyen varyansları ise $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ oranının nokta tahmini $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ dir.

Tanım: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ ve $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2m}$ μ_1 ve μ_2 ortalamalı, σ_1^2 ve σ_2^2 varyanslı iki kitleden alınan n ve m birimlik $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$ ortalamalı rasgele örneklemeler ise;

$$F_{n-1, m-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{\sigma_1^2 (n-1)}}{\sum_{i=1}^m \frac{(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{\sigma_2^2 (m-1)}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

değerine, payı $v_1 = n-1$ paydası $v_2 = m-1$ serbestlik dereceli F istatistiği denir.

Varyansların Oranı İçin Aralık Tahmini

Bu durumda varyansların oranı için güven aralığı şu şekilde oluşturulur:

$$\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1}} * \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}, m-1, n-1} * \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Serbestlik derecesi sırasının farklı olduğuna dikkat edilmeli, bu durum f testi tablosunda değer okurken önem arz eder.

Varyansların Oranı İçin Aralık Tahmini

➤ Varyansların oranı için alt güven sınırı:

$$\frac{1}{F_{\alpha, n-1, m-1}} * \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

➤ Varyansların oranı için üst güven sınırı:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{\alpha, m-1, n-1} * \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Varyansların Oranı İçin Aralık Tahmini

Örnek: Lise öğrenimini tamamlamış 13 erkek ve 16 kız öğrenciye genel yetenek sınavı uygulanmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Erkek öğrencilerin not ortalaması 82, standart sapması 8;
- Kız öğrencilerin not ortalaması 78, standart sapması 7'dir.

σ_1^2 ve σ_2^2 sırasıyla lise öğrenimi görmüş ve kendilerine test uygulanmış erkek ve kız öğrencilerin kitlelerinin varyansları ise, bu varyansların oranının %90'lık güven aralığını bulalım.

Varyansların Oranı İçin Aralık Tahmini

Çözüm: $n = 13$; $S_1^2 = 64$; $m = 16$; $S_2^2 = 49$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{64}{49} = 1,3$$

$$\alpha = 0,10 \text{ olduğuna göre; } F_{\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1} = F_{0,05; 12; 15} = 2,48$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}, m-1, n-1} = F_{0,05; 15; 12} = 2,62$$

➤ Bu durumda erkek ve kız öğrencilerin varyanslarının oranına ilişkin güven aralığı:

$$\frac{1}{2,48} * 1,3 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2,62 * 1,3 \quad \Rightarrow \quad 0,52 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3,40$$

İki Oranın Farkı İçin Aralık Tahmini

➤ π_1 ve π_2 kitle oranları sırasıyla $p_1 = \frac{X_1}{n}$ ve $p_2 = \frac{X_2}{m}$ ile tahmin edilirse normal yaklaşım kullanarak yeter derecede büyük n ve m için güven aralığı kurabiliriz.

$$(p_1 - p_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}} < \pi_1 - \pi_2 < (p_1 - p_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}$$

İki Oranın Farkı İçin Aralık Tahmini

Örnek: Ağrı kesici iki tip ilaç 100 ve 150 kişilik iki gruba verilmiştir. Birinci gruptan 65, ikinci gruptan 118 kişi ağrılarda azalma olduğunu söylemişlerdir. İki ilacın etkisi için verilen yanıtlardaki gerçek oranlar farkı için %95'lik güven aralığı oluşturalım.

- $n = 100$; $X_1 = 65$; $m = 150$; $X_2 = 118$ olduğuna göre
- $p_1 = 0,65$ ve $p_2 = 0,79$ bulunur. $p_1 < p_2$ olduğu için farkı pozitif olarak korumak amacıyla $p_2 - p_1$ farkı için güven aralığı oluşturulacaktır. Buna göre;

$$-0,14 - 1,96 \sqrt{\frac{0,65(0,35)}{100} + \frac{0,79(0,21)}{150}} < \pi_1 - \pi_2 < -0,14 + 1,96 \sqrt{\frac{0,65(0,35)}{100} + \frac{0,79(0,21)}{150}}$$

$$-0,254 < \pi_1 - \pi_2 < -0,026$$

$$\text{Ya da } 0,026 < \pi_2 - \pi_1 < 0,254$$

Aralık Tahmini (Güven Aralığı)

Tek Popülasyon İçin

- Ortalama için aralık tahmini (μ)
 - Kitle varyansı biliniyorsa - z tablosu
 - Kitle varyansı bilinmiyorsa
 - $n > 30$ ise - z tablosu
 - $n < 30$ ise - t tablosu
- Varyans için aralık tahmini (σ^2) - χ^2 tablosu
- Oran için aralık tahmini (π) - z tablosu

İki Popülasyon İçin

- Ortalamaların farkı için aralık tahmini ($\mu_1 - \mu_2$)
 - Kitle varyansları biliniyorsa - z tablosu
 - Kitle varyansları bilinmiyorsa
 - Varyanslar eşit kabul edilirse - t tablosu
 - Varyanslar eşit kabul edilmezse - t tablosu
- Varyansların oranı için aralık tahmini (σ^2_1/σ^2_2) - f tablosu
- Oranların farkı için aralık tahmini ($\pi_1 - \pi_2$) - z tablosu