



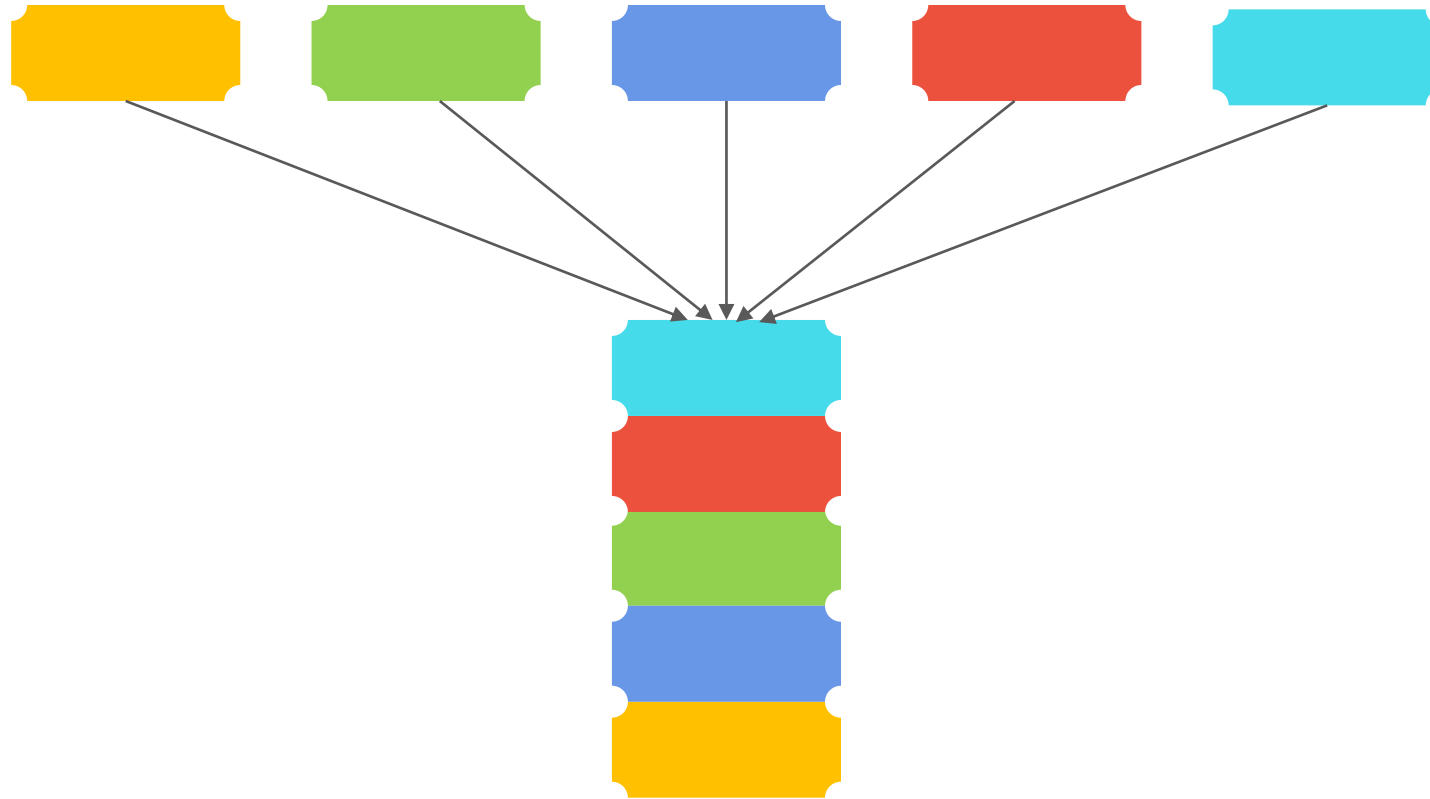
T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



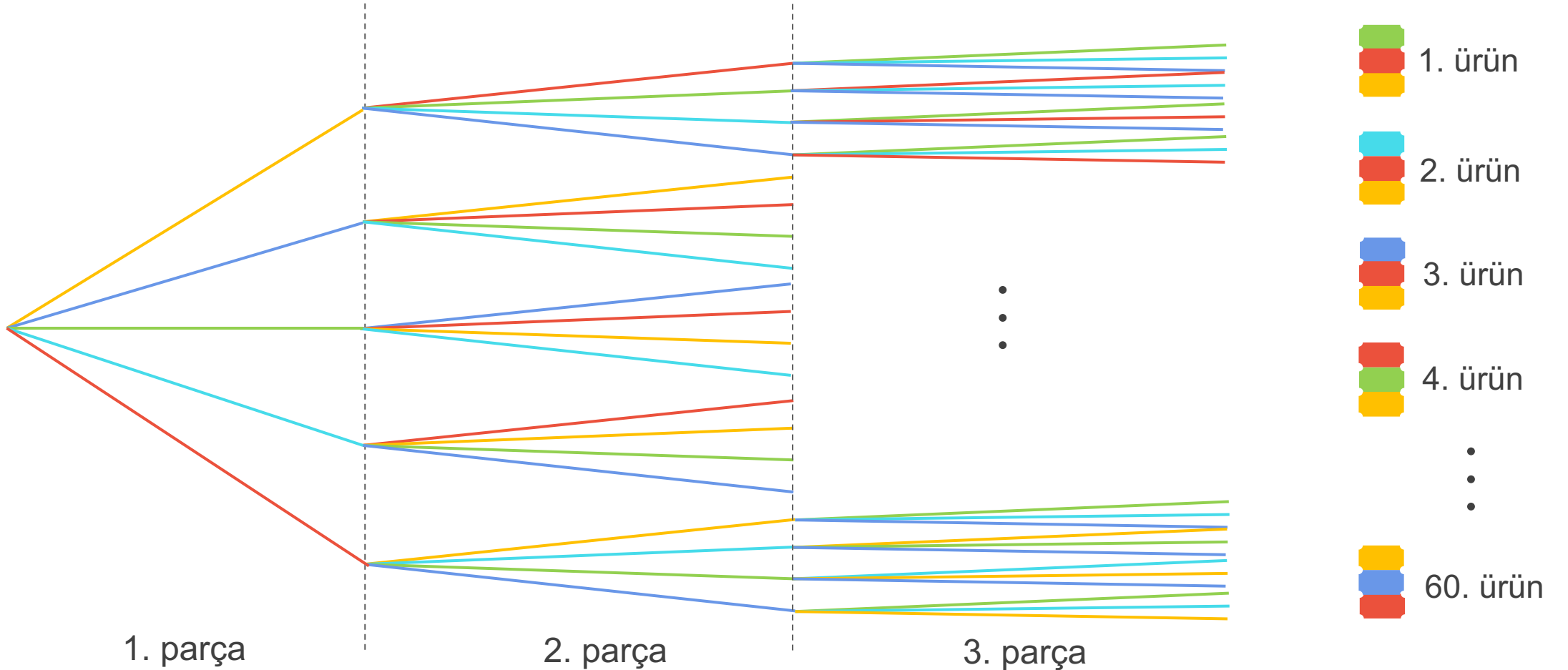
Mühendislik İstatistiği-I / Permütasyonlar & Kombinasyonlar

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

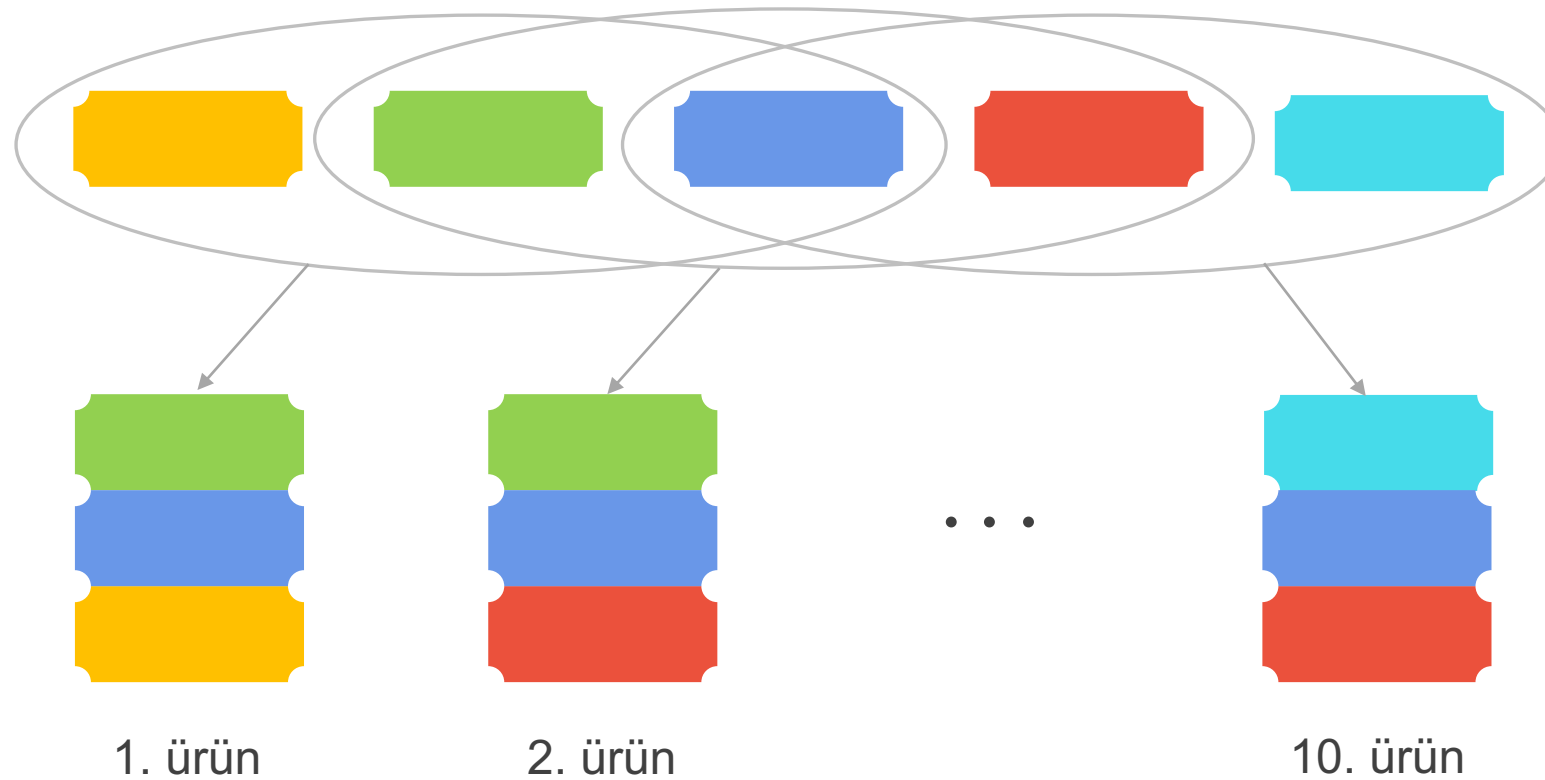
Permütasyon & Kombinasyon



Permütasyon & Kombinasyon



Permütasyon & Kombinasyon



Permütasyon

Tanım: 1'den n'e kadar pozitif tamsayıların çarpımına **n-faktöriyel** denir, **n!** olarak gösterilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$n! = 1.2.3. \dots (n-1).n = (n-1)! \cdot n \text{ (Çarpım Kuralı)}$$

Örnek: $3! = 1.2.3 = 6;$

$$5! = 4!.5 = 24.5 = 120;$$

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56$$

Tanım: $0! = 1$

$$1! = 1$$

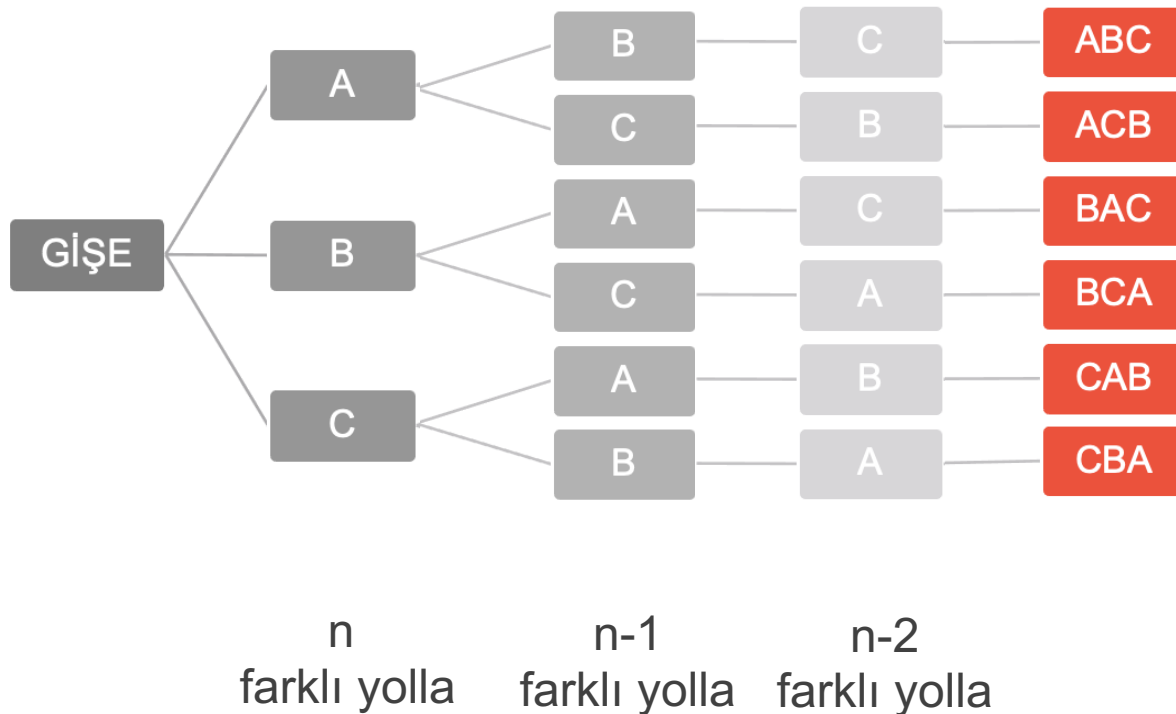
Permütasyon

Tanım: Nesnelerin kümesinin bir kısmının veya tümünün belli bir sıralamasına veya düzenlenmesine **Permütasyon** veya **dizilem** denir.

Tanım: n elemanlı bir gruptan bir defada alınan r elemanın sıralanmasına n elemanın bir permütasyonu denir. ${}_nP_r$; $P(n,r)$ veya P_n^r şeklinde gösterilir. Burada $(r < n)$ 'dir.

Permütasyon

Örnek: Bir tiyatro gişesinde bilet almak isteyen üç kişi kaç farklı şekilde gişe önünde sıraya girebilir?



$$n.(n-1).(n-2) = 3.2.1 = 3! = 6$$

Tümü birlikte kullanılan n farklı elemanın permütasyonlarının sayısı $n!$ dir. Bu sayı;

$P_n^n = n!$ olarak gösterilir.

Permütasyon

Örnek: 7 farklı kitap arasından seçilen 3 kitap bir kitaplıktaki 3 boş yere kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

- $n = 7$ ve $r = 3$;
- $P_7^3 = 7.6.5 = 210$ farklı şekilde yerleştirilebilir.
 $= n.(n-1).(n-2)$
 $= n.(n-1)....(n-r+1)$

O halde; $P_n^r = n.(n-1).(n-2)....(n-r+1)$ olarak hesaplanır.

Permütasyon

$$\triangleright P_n^r = n.(n-1).(n-2)....(n-r+1)$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)....(n-r+1).(n-r+1-1)!}{(n-r+1-1)!}$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)....(n-r+1).(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Teorem: Bir defada r tanesi alınarak kullanılan n farklı elemanın permütasyonlarının sayısı; $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ olarak hesaplanır. ($n \leq r$ 'dir)

Permütasyon

Örnek: Bir TV sunucusu haber bülteninde okuması gereken 3 farklı haberden 2 tanesini kaç farklı şekilde sıralayabilir?

$$n=3; r=2 \text{ olmak üzere; } P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

H1, H2	H1, H3	H2, H3
H2, H1	H3, H1	H3, H2

Permütasyon

Örnek: 6 kız ve 3 erkekten oluşan bir grupta

a) 3 erkek yan yana olmak koşuluyla kaç farklı sıralama yapılabilir?

b) Sıranın sonunda bir kız olacak ve erkekler yan yana gelmeyecek şekilde kaç farklı sıralama yapılabilir?

➤ a) K K K K K K ve E E E

6 kişi 1 kişi

7 kişi $P_7^7 = 7!$ Şekilde sıralanabilir.

3 erkek de kendi arasında $P_3^3 = 3!$ şekilde sıralanabilir. O halde;

İstenen yanıt $P_7^7 \cdot P_3^3 = 7!.3!$ olacaktır.

Permütasyon

b)



İlk olarak 6 kız $P_6^6 = 6!$ farklı sıralama ile yerleştirilir.

Yıldız ile gösterilen 6 yerden üçüne erkekler yerleştirilir. Bu işlem $P_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ farklı şekilde yapılabilir.

O halde istenilen yanıt $P_6^3 P_6^6 = 120 \cdot 6!$ olacaktır.

Permütasyon

Teorem: n elemanın r_1 'i bir tür, r_2 'si diğer bir tür ... r_k 'sı başka bir tür ve özdeş ise, bu n elemandan yapılabilecek r 'lik permutasyonların sayısı:

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Buna özdeş neslenerin permütasyonu denir.

Permütasyon

Örnek: Özdeş 3 matematik, 5 fizik ve 2 kimya kitabı bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

$n=10$, $r_1=3$, $r_2=5$, $r_3=2$ olmak üzere;

$$P_{10}^{3,5,2} = \binom{10}{3,5,2} = \frac{10!}{3! 5! 2!} = \frac{5! 6.7.8.9.10}{5! 1.2.3.1.2} = 2520 \text{ şekilde dizilebilir.}$$

- Kitaplar özdeş olmasaydı ne olurdu?
- Aynı ders kitaplarının (özdeş değil) yan yana dizilmesi istenseydi ne olurdu?

Permütasyon

Teorem: Bir çember üzerinde düzenlenecek n farklı elemanın permütasyonunun sayısı $(n-1)!$ dir.

Örnek: Bekar 2 kadın ve 3 evli çift bir yuvarlak masa etrafında oturmak istiyor;

- a) Hiçbir koşul olmadan,
- b) Bekar kadınlar yan yana oturmayacak şekilde,
- c) Erkekler yan yana oturmayacak şekilde kaç farklı düzenleme yapılabilir?

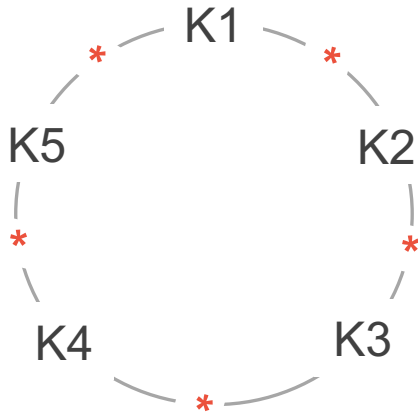
Permütasyon

a) Dairesel permütasyon olduğundan $(8-1)! = 7!$ farklı şekilde oturulabilir.

b) 2 bekar kadının yan yana oturduğunu düşünelim (sorunun tümleyeni);

Bu durumda, 2 kadını 1 kişi gibi alırsak 7 kişi bir daire etrafına $(7-1)! = 6!$ şekilde oturabilir. 2 kadının kendi arasında yer değiştirmesi durumunu da hesaba katarsak; $6! \cdot 2!$ şekilde oturulur. Buna göre sorunun cevabı; $7! - (6! \cdot 2!)$ 'dir.

c)



5 kadın yuvarlak masaya $(5-1)! = 4! = 24$ şekilde oturur.

3 adam 5 farklı yere $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ şekilde oturur.

Bu durumda sorunun cevabı $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$ 'tır.

Kombinasyon

Tanım: Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin bir kombinasyonu, düzenleme sırasına bakılmaksızın n nesneden r tanesinin bir seçimidir. ${}_nC_r$;

$C(n,r)$; C_n^r veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir ve şu şekilde hesaplanır:

$$C_n^r = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

Teorem: Her bir kombinasyon için $r!$ permütasyon durumu olduğundan;

$$C_n^r \cdot r! = P_n^r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Kombinasyon

Örnek: 4 kitap arasından üçünün olanaklı sonuçlarını düşünelim;

ABC, ABD, ACD, BCD

Seçimlerimizin her birinden $3!=6$ farklı sıralama (permütasyon) elde edilir.

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

Tabloda görüldüğü gibi, $\frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!}$ kombinasyon ve $\left(\frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!}\right) \cdot 3!$ permütasyon vardır.

Kombinasyon

Örnek: 20'lik bir elma kasasının içinde 5 çürük elma bulunmaktadır. Bu kasadan,

a) İki sağlam elma kaç şekilde çekilir?

$$C_{15}^2 = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = 105$$

b) Üç çürük elma kaç şekilde çekilir?

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

c) Üç sağlam ve iki çürük elma kaç şekilde çekilir?

$$C_{15}^3 \cdot C_5^2 = \binom{15}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{15!}{3!(15-3)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} = 4550$$

Kombinasyon

Örnek: 4 evli çift arasından 3 kişilik bir ekip kaç farklı yolla seçilir?

a) Tümü eşit seçim şansına sahiptir.

Sıra önemli olmadığından ve başka bir kural da bulunmadığından 8 kişi arasından 3 kişilik bir ekip seçimi yapılacaktır.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 7 \cdot 8 = 56$$

Kombinasyon

b) Kurulda 2 kadın ve 1 erkek olmak zorundadır.

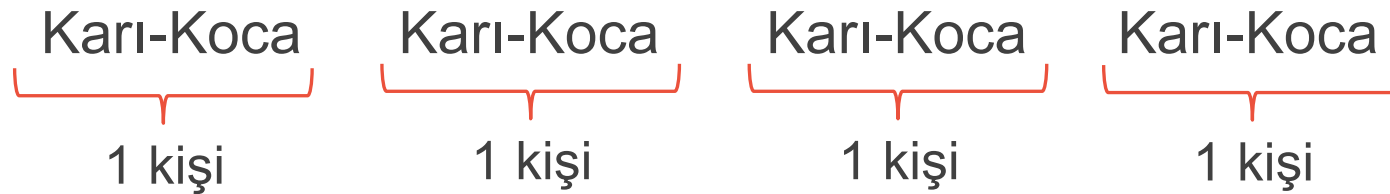
Bu durumda 4 kadından 2'si $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ farklı yolla;

4 erkekten 1'i $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$ farklı yolla seçilir.

Böylece, 2 kadın ve 1 erkek $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$ farklı yolla seçilir.

Kombinasyon

c) Karı-kocalar aynı ekipte bulunmayacaklar.



Bu durumda 4 kişi arasından 3'lü seçim $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ farklı yolla olur.

Seçilen her kişi için karı/koca değişim durumu = 2 olmak üzere;

Eşlerin aynı ekipte bulunmadığı durum $= \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ farklı yolla gerçekleşir.

Kombinasyon

Teorem: Pascal Kuramı

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \quad 1 \leq r \leq n$$

İspatı:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)! \cdot (n-r+1)} + \frac{n!}{(r-1)! \cdot r \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{1}{n-r+1} + \frac{1}{r} \right) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{r+n-r+1}{r(n-r+1)} \right) \\ &= \frac{n!(n+1)}{(r-1)! r \cdot (n-r)! \cdot (n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \end{aligned}$$

Kombinasyon

Örnek: 6 aday katıldığı bir temsilci seçiminde bir seçmen oyunu bir ya da iki adaya verebilmektedir. Buna göre seçmen kaç türlü oy verebilir?

Burada iki ayırık durum vardır. Seçmen;

$$\left. \begin{array}{l} \text{1 aday için oy kullanırsa } \binom{6}{1} = 6 \\ \text{2 aday için oy kullanırsa } \binom{6}{2} = 15 \end{array} \right\} 21 \text{ şekilde oy kullanır.}$$

Pascal teoremine göre; $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = \binom{7}{2} = 21$ şekilde oy kullanır.

Kombinasyon

Örnek: 1'den 50'ye kadar olan tam sayılardan (1 ve 50 dahil) toplamı tek sayı olan 3 elemanlı bir küme kaç farklı şekilde oluşturulur?

- Kümeler {Tek, Tek, Tek} ya da {Tek, Çift, Çift} olmalı
- 50 tam sayının 25'i tek sayı, 25'i çift sayı olduğuna göre;
- 3 tek sayı gelme durumu $\binom{25}{3}$
- 2 çift 1 tek sayı gelme durumu $\binom{25}{2} \cdot \binom{25}{1}$

Bu durumda sorunun yanıtı $\binom{25}{3} + \binom{25}{2} \cdot \binom{25}{1} = 9800$ olacaktır.

Kombinasyon

Örnek: Bir kişi 10 arkadaşından ikisini, her defasında farklı ikisi olmak üzere 3 gece yemeğe davet ediyor. Bu işlem kaç farklı şekilde yapılabilir?

- 1. gece: 10 kişiden 2'si $\binom{10}{2}$ şekilde,
- 2. gece: 10 kişiden 2'si $\binom{10}{2} - 1$ şekilde (ilk gece seçilen çift dışarda tutulur),
- 3. gece: 10 kişiden 2'si $\binom{10}{2} - 2$ şekilde (iki gece seçilen çiftler dışarda tutulur),

Buna göre bu işlem $\binom{10}{2} \cdot \left(\binom{10}{2} - 1 \right) \cdot \left(\binom{10}{2} - 2 \right)$ farklı şekilde yapılabilir.

Kombinasyon

Teorem: $C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$

$$C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 \text{ 'dir.}$$

Tekrarlı Kombinasyonlar

Teorem: Birbirinden farklı, koşulsuz ve sınırsız olarak tekrarlanabilen n öğenin, sıra göz önünde tutularak alınan k 'lı kombinasyonlarının sayısı n^k ya eşittir.

➤ $k=2$ için kombinasyonların sayısı n^2 'dir. 1, 2, ..., n ' e kadar öge var ise, 2'li kombinasyonlar şu şekildedir:

11	12	...	1n
21	22	...	2n
...	...	...	...
n1	n2	...	nn

Tekrarlı Kombinasyonlar

Teorem: Birbirinden farklı, koşulsuz ve sınırsız olarak tekrarlanabilen n öğenin, sıra göz önünde tutulmaksızın alınan k 'lı kombinasyonlarının sayısı;

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \text{ dır.}$$

➤ $k=2$ için $1, 2, \dots, n$ eleman düşünüldüğünde;

11	12	...	1n
	22	...	2n
		...	...
			nn

$$\begin{aligned} n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

Teorem: Bir A kümesinde n farklı öge bulunsun. A 'nın $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ formunda farklı sıralı parçalanmalarının sayısı (A_1 de r_1 , A_2 de r_2 , ... A_k da r_k öge ve $r_1+r_1+\dots+r_k = n$ olmak üzere) şu şekilde hesaplanır:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

Örnek: 9 farklı oyuncak, 4 kardeş arasında paylaştırılacaktır. En küçük kardeşe 3 tane, diğerlerine eşit sayıda oyuncak vermek koşuluyla bu dağıtım kaç şekilde yapılabilir?

➤ Kardeşlerden birine 3, diğerlerine 2'şer oyuncak verilecektir.

Bu durumda $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$ durum olur.

$$= \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$= 7560$$

Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

Örnek: Bir kavanozda 1'den 7'ye kadar numaralandırılmış 7 top bulunmaktadır. Önce 2'sini, sonra 3'ünü ve en sonda yine 2'sini kaç farklı şekilde çekebiliriz?

- Bu sıralı parçalanmada çekilen 2 topun A_1 'e, 3 topun A_2 'ye, 2 topun da A_3 'e ait olduğunu düşünersek;

$$\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \text{ şekilde çekim yapabiliriz.}$$

- İkinci bir yol ise; $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$

Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

Örnek: 8 arkadaş bir gece kalmak üzere bir otele gidiyorlar. Otelde deniz manzaralı 2 kişilik bir oda, dağ manzaralı 3 kişilik bir oda ve cadde manzaralı 3 kişilik başka bir oda bulunmaktadır. Belirli 2 kişi aynı odada bulunmamak koşuluyla bu 8 kişi 3 odaya kaç farklı şekilde yerleşebilir?

- Sorunun tümleyenini alarak yani belirli 2 kişinin aynı odada kaldığı durumu tüm durumdan çıkararak çözümü bulalım.
- Hiçbir koşul olmadığında 8 kişi 3 odaya

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 560 \text{ şekilde yerleşiyor.}$$

Sıralı ve Sırasız Parçalanmalar

Belirli 2 kişinin aynı odada kaldığı durumlara bakarsak;

- 2 kişi 2 kişilik A_1 odasında kalırsa; $\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 20$
- 3 kişilik A_2 odasında kalırsa; $\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 60$
- 3 kişilik A_3 odasında kalırsa; $\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 60$

Bu durumda sorunun cevabı $560 - 20 - 60 - 60 = 420$ olarak hesaplanır.

Binom Teoremi

n pozitif bir tamsayı ise

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \binom{n}{n} b^n$$
$$= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r}b^r \text{ 'dır.}$$

$\binom{n}{r}$ katsayılarına binom katsayısı denir.

Binom Teoremi

Örnek: $(a + b)^5$ in binom teoremine göre açılımını yapalım.

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^{5-1} b + \binom{5}{2} a^{5-2} b^2 + \binom{5}{3} a^{5-3} b^3 + \binom{5}{4} a^{5-4} b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Binom Teoremi

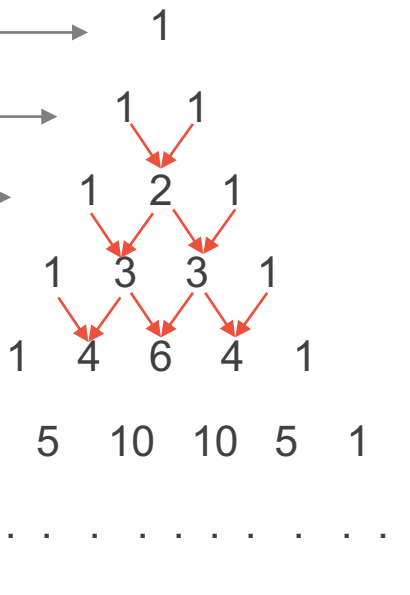
$(a + b)^n$ açılımının özellikleri:

- $(n+1)$ terim vardır.
- Her terimde a ve b 'nin üsleri toplamı n 'dir.
- a 'nın üsleri n 'den 0 'a kadar terimden terime azalır, b 'nin üsleri 0 'dan n 'ye kadar terimden terime artar.
- Herhangi bir terimin kat sayısı k 'nın a ya da b 'den birinin üssü olduğu $\binom{n}{k}$ 'dir
- Uçlardan eşit uzaklıktaki terimlerin kat sayıları eşittir.

Binom Teoremi

Pascal Üçgeni

$(a+b)$ 'nin art arda gelen üsleri üçgen şeklinde dizilerek Pascal Üçgeni oluşturur:

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^0 = 1 & \longrightarrow & 1 \\ (a+b)^1 = a + b & \longrightarrow & \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \longrightarrow & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array} \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \longrightarrow & \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & \longrightarrow & \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \\ (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 & \longrightarrow & \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \\ \dots & & \dots \end{array}$$


Dersin İşleyişi ile İlgili Öneriler?