

Mühendislik İstatistiği-I / Rasgele Değişkenler ve Dağılımları - 4

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Momentler

- Beklenen değer işlemine dayalı olarak geliştirilen momentler, gerek fonksiyonların parametreleri, gerekse ilgilenilen rassal sistemin bütünleşik davranış göstergeleri için türetilen bir genellemedir. Beklenen değer $E(X)$, moment denilen parametreler sınıfının bir özel halidir.
- $E[(X - a)^k]$: a bir gerçel sayı olmak üzere, X rassal değişkenin a 'ya göre k . mertebeden momenti (k . momenti) denir.
- Eğer $a=0$ ise, X 'in k . mertebeden momenti $E(X^k)$ beklenen değerine dönüşür ve bu moment m_k ile gösterilir.

Momentler

- X , x_i değerlerini P_i olasılıkları ile alan kesikli rasgele değişken ise, k . mertebeden moment şu şekilde formüle edilir;

$$m_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k \cdot p_i$$

- X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken ise, k . mertebeden moment şu şekilde formüle edilir;

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

Momentin Özellikleri

- 1) $E[(aX)^k] = a^k \cdot E(X^k)$ 'dir.
- 2) $E[(X - c)^k]$ beklenen değerine c noktasına göre k . mertebeden moment denir.
 $c = 0$ noktasına göre momentlere **adi momentler** denir.
- 3) $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$: Beklenen değere (ortalamaya) göre momentlere **merkezi moment** denir. Buna göre ilk üç mertebeden merkezi moment şöyle bulunur;
 - $\mu_1 = E[(X - E(X))^1] = E(X - m_1) = E(X) - m_1 = m_1 - m_1 = 0$
 - $\mu_2 = E[(X - E(X))^2] = E[(X - m_1)^2] = E(X^2) - 2m_1E(X) + m_1^2 = m_2 - m_1^2$
 - $\mu_3 = E[(X - E(X))^3] = E[(X - m_1)^3] = E(X^3) - 3m_1E(X^2) + 3m_1^2E(X) - m_1^3$
 $= m_3 - 3m_1m_2 + 3m_1^2m_1 - m_1^3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$

Momentin Özellikleri

4) İkinci mertebeden merkezi momente ($\mu_2 = E[(X - E(X))^2]$), X rassal değişkenin **varyansı** denir.

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = m_2 - m_1^2 \quad \text{bulunur.}$$

5) Standart sapmanın beklenen değere oranına **değişim (varyasyon) katsayısı** (DK) denir.

$$DK = \frac{\sigma}{m_1} \quad \text{veya} \quad DK = \frac{\sigma}{\mu_1} \cdot 100 \quad \text{ile ifade edilir.}$$

Beklenen değer 1'e eşit olduğunda DK'da standart sapmaya eşit olur.

Momentin Özellikleri

6) $E[|X - E(X)|^k]$ ifadesine, X rassal değişkenin k . mertebeden **mutlak merkezi momenti** denir.

7) X , $f(x)$ olasılık fonksiyonuna (veya olasılık yoğunluk fonksiyonuna) sahip kesikli veya sürekli rassal değişken olsun. $h > 0$ ol. üz. $|t| < h$ aralığında her değeri alan t için e^{tx} in beklenen değeri X 'in **moment çıkaran fonksiyonu** olarak tanımlanır. Buna göre X 'in moment çıkaran fonksiyonu;

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \cdot f(x) & ; \text{ X rassal değişkeni kesikli ise.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx & ; \text{ X rassal değişkeni sürekli ise.} \end{cases}$$

Moment Çıkaran Fonksiyonu

Teorem: X rasgele değişkeninin moment çıkarar fonksiyonu $m_x(t)$ olsun.

$$\left. \frac{d^r m_x(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = E(X^r) = m_r$$

➤ Birinci türevde; $M'(t = 0) = \left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = E(X) = m$ (X 'in 1. momentidir.)

➤ İkinci türevde; $M''(t = 0) = \left. \frac{d^2 M(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = E(X^2)$ (X 'in 2. momentidir.)

...

➤ n . türevde; $M^{(n)}(t = 0) = \left. \frac{d^n M(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = E(X^n)$ (X 'in n . momentidir.)

Moment Çıkaran Fonksiyonu

Örnek:

$$P(X=x) = \begin{cases} x/8 & , \quad x=1,3,4 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Yukarıda bir X kesikli rassal değişkenin olasılık fonksiyonu verilmiştir.

a) X rassal değişkenin moment çıkarar fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} \cdot f(x) \\ &= \sum_x e^{tx} \cdot \frac{x}{8} \\ &= e^t \cdot \frac{1}{8} + e^{3t} \cdot \frac{3}{8} + e^{4t} \cdot \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{8} (e^t + 3e^{3t} + 4e^{4t}) \end{aligned}$$

Moment Çıkaran Fonksiyonu

b) Moment çıkaran fonksiyonu kullanarak ilk iki momenti bulalım.

➤ Fonksiyonun 1. türevini alırsak;

$$M'(t) = \frac{1}{8} (e^t + 3 \cdot 3e^{3t} + 4 \cdot 4e^{4t})$$

$$M'(0) = \frac{26}{8} = E(X) = \mu$$

➤ Fonksiyonun 2. türevini alırsak;

$$M''(t) = \frac{1}{8} (e^t + 3 \cdot 3 \cdot 3e^{3t} + 4 \cdot 4 \cdot 4e^{4t})$$

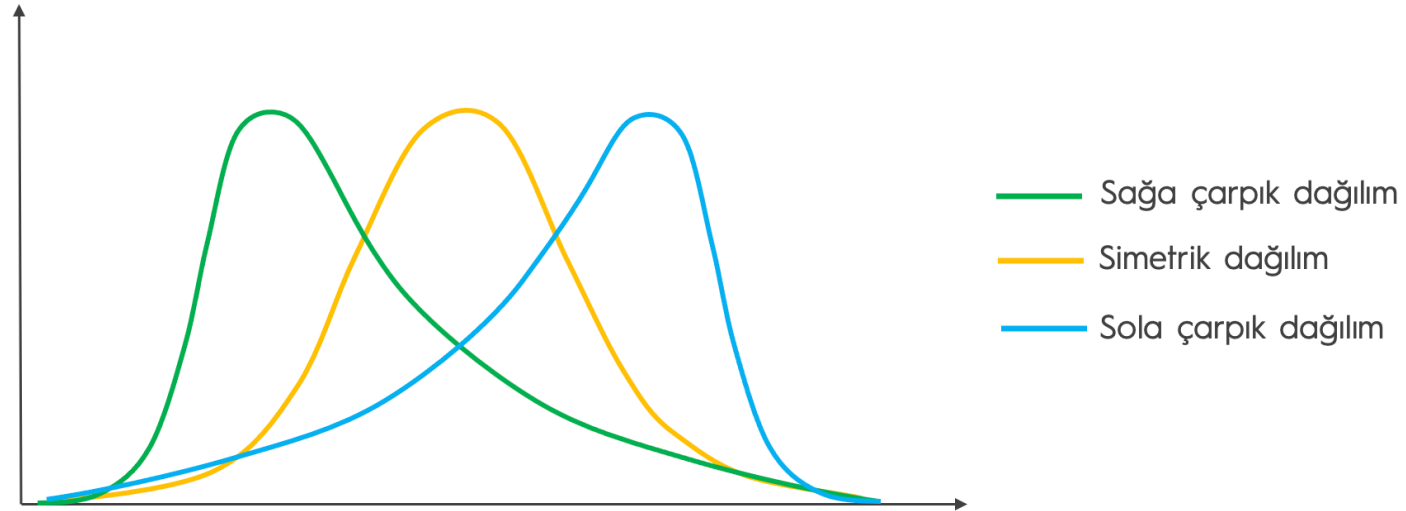
$$M''(0) = \frac{1}{8} (1 + 27 + 64) = \frac{92}{8} = \frac{23}{2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyonu

Ödev: X rasgele değişkeni için $f(x) = \frac{1}{4} \binom{3}{x}$, $x= 0, 1, 2, 3$ olasılık fonksiyonu verilmiş olsun. Bu rasgele değişken için moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz. Bu fonksiyona göre X 'in 1., 2. ve 3. momentlerini hesaplayınız.

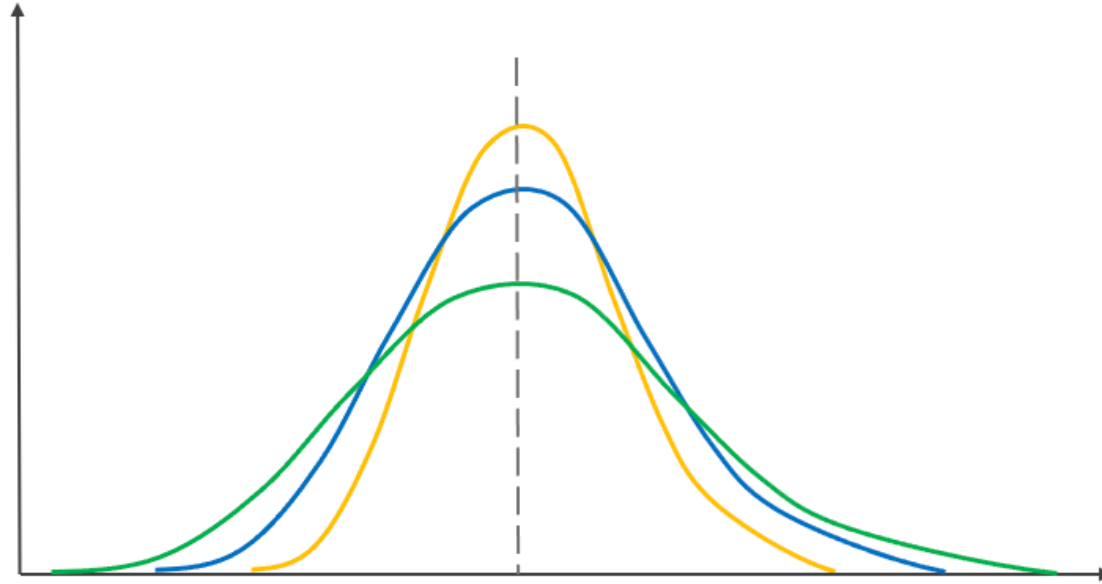
Bir Dağılımda Çarpıklık (Skewness)

- Ortalamaya göre üçüncü moment μ_3 ' e simetrik olmayışın ölçüsü denir. Yani çarpıklık, bir dağılımda simetriden ayrılışın derecesidir.



Bir Dağılımda Sivrilik (Kurtosis)

- Ortalamaya göre dördüncü moment μ_4' e düzlük (yassılık) ölçüsü denir. Yani sivrilik, bir dağılımın basıklığının derecesidir.



Markov Eşitsizliği

- X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu veya olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmediğinde, bu değişkene ilişkin olasılıkları hesaplamak için geliştirilen bir eşitsizliktir.
- Markov eşitsizliği bir rassal değişkenin dağılımı hakkında bilgi sağlar ve bu değişkenin değerlerinin ne kadar dağılmış olduğunu ölçer.

Tanım: X, negatif olmayan değerler alabilen bir rassal değişken ise,

$$P(X \geq C) \leq \frac{E(X)}{C}$$

eşitsizliğine Markov Eşitsizliği denir.

Markov Eşitsizliği

Örnek: X , bir çocuk tiyatrosunda rastgele seçilmiş çocukların yaşlarını gösteren bir rassal değişkendir. Bu rassal değişkenin ortalaması $E(X) = 5,5$ yaş olduğuna göre rastgele seçilen bir çocuğun yaşının en az 17 olma olasılığını hesaplayalım.

$$P(X \geq C) \leq \frac{E(X)}{C}$$

$$P(X \geq 17) \leq \frac{5,5}{17} = 0,32$$

Chebyshev Eşitsizliği

- Chebyshev Eşitsizliği, aritmetik ortalaması ve varyansı (veya standart sapması) verilen bir rassal değişkenin, ortalama etrafında ne kadar dağıldığını ölçen eşitsizliktir.

Tanım: X , μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı bir rassal değişken olsun. $k > 0$ değeri için Chebyshev eşitsizliği,

$$P((X - \mu)^2 \geq k^2 \cdot \sigma^2) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Aynı şekilde;

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{veya} \quad P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \text{veya} \quad P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Chebyshev Eşitsizliği

Örnek: X , bir çocuk tiyatrosunda rastgele seçilmiş çocukların yaşlarını gösteren bir rassal değişkendir. Bu rassal değişkenin ortalaması $E(X) = 5,5$ yaş ve $\sigma = 1$ yaş olduğuna göre rastgele seçilen bir çocuğun yaşının en az 17 olma olasılığını hesaplayalım.

$$P(X \geq 17) = P(X - \mu \geq 17 - \mu) = P(|X - 5,5| \geq 11,5) \text{ olur. Buradan,}$$

$$= P(|X - 5,5| \geq 11,5) \leq \frac{\sigma^2}{(11,5)^2} = \frac{1}{(11,5)^2} = 0,0076$$

- Yani, tiyatroya gelen 10000 kişiden en fazla 76 kişi 17 yaşından büyük olabilmektedir

Chebyshev Eşitsizliği

- X rassal değişkeninin ortalaması ve varyansı bilindiğinde, X 'in alabileceği değerlerin olasılıklarının hesaplanması için geliştirilen fonksiyonları kullanmadan (veya bu olasılıkların bilinmediği durumlarda), X 'in özel aralıklarda değer alma olasılıklarının alt ve üst sınırı Chebyshev eşitsizliği ile bulunabilmektedir.

Örnek: İstatistik dersinin dönem sonu not ortalaması 75 ve standart sapması 8'dir. Öğrencilerin dönem sonu notunun 59 ile 91 aralığında olma olasılığını bulalım.

Chebyshev Eşitsizliği

Çözüm: $\mu = 75$, $\sigma = 8$, $\text{ÜS} = 91$, $\text{AS} = 59$ olarak verilmiş.

➤ $\text{ÜS} = \mu + k \cdot \sigma$ ve $\text{AS} = \mu - k \cdot \sigma$ olmak üzere;

$$\left. \begin{array}{l} \mu + k \cdot \sigma = 91 \longrightarrow 75 + k \cdot 8 = 91 \\ \mu - k \cdot \sigma = 59 \longrightarrow 75 - k \cdot 8 = 59 \end{array} \right\} k=2$$

➤ Bu durumda $P(59 < X < 91) = P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma)$

$$= P(-k \cdot \sigma < X - \mu < k \cdot \sigma)$$

$$= P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 0,75$$

Chebyshev Eşitsizliği

Soru: Büyük bir lokantanın Cumartesi akşamları hizmet vereceği müşteri sayısı, ortalaması 160, standart sapması 7,5 olan rasgele bir değişkendir. Bu lokantanın bir Cumartesi gecesi 145 ile 175 arasında müşteriye hizmet verme olasılığı en az ne kadardır?

Chebyshev Eşitsizliği

- Chebyshev eşitsizliği ile X 'in ortalamadan her iki yönde belirli bir sapma ile bulunan aralıkta değer alma olasılığının alt sınırı hesaplanabilir.

Örnek: Ortalamadan en az 2σ uzakta bulunmanın maksimum olasılığı nedir?

$k \cdot \sigma = 2\sigma$ olmak üzere $k=2$ 'dir.

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| \geq 2 \cdot \sigma) \leq \frac{1}{2^2} = 0,25$$

Chebyshev Eşitsizliği

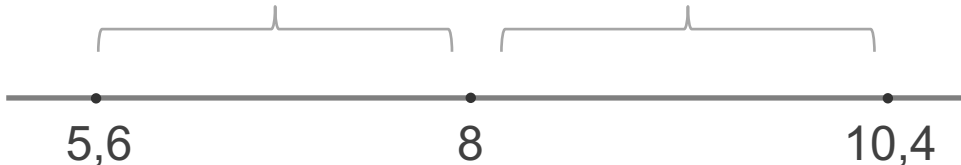
Örnek: X rassal değişkenin ortalamasının 8 ve standart sapmasının 2 olduğu bilinmektedir. Bu rassal sistemden geliş güzel çekilen bir birimin;

a) 5,6'ya eşit veya küçük ya da 10,4'e eşit veya büyük çıkma olasılığını bulunuz.

$$O_1 = \{X | x \leq 5,6 \text{ veya } x \geq 10,4\}$$

$$P(O_1) = P(x \leq 5,6 \text{ veya } x \geq 10,4)$$

$$k \cdot \sigma = 8 - 5,6 = 2,4 \quad k \cdot \sigma = 10,4 - 8 = 2,4$$



$$\rightarrow k=1,2$$

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - 8| \geq 1,2 \cdot 2) \leq \frac{1}{1,2^2}$$

$$P(O_1) \leq 0,6944$$

Chebyshev Eşitsizliği

b) 4 ile 12 arasında çıkma olasılığını hesaplayınız.

$O_2 = \{X \mid 4 \leq x \leq 12\}$ olayı olmak üzere $P(O_2) = P(4 \leq x \leq 12)$ isteniyor.

$$\left. \begin{array}{l} \text{➤ } \text{ÜS} = \mu + k \cdot \sigma = 8 + k \cdot 2 = 12 \\ \text{➤ } \text{AS} = \mu - k \cdot \sigma = 8 - k \cdot 2 = 4 \end{array} \right\} k=2$$

Bu durumda $P(4 \leq x \leq 12) = P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma)$

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 0,75$$

Bu sonuca göre, rastgele çekilen bir birimin belirtilen aralıkta (4 ile 12 arasında) olma olasılığı %75'den büyüktür.

Chebyshev Eşitsizliği

➤ X , ortalaması μ olan ve negatif değerler almayan rassal değişken olsun.

Herhangi bir $k > 0$ için;

$P(X > k\mu) < \frac{1}{k}$ şeklinde hesaplanabilir.

Dersin İşleyişi ile İlgili Öneriler?