

Mühendislik İstatistiği-I / Bazı Önemli Kesikli Dağılımlar-I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Bernoulli Dağılımı

Tanım: Bir X rasgele değişkeni için yalnız iki sonuç varsa X 'e Bernoulli rasgele değişkeni denir.

- Paranın atılması
- İçinde siyah ve beyaz topların bulunduğu bir torbadan bir top çekilmesi
- Kusurlu ve kusursuz ürünlerin olduğu bir kutudan bir ürün çekilmesi

Deneme sonucunda elde edilecek bu iki sonuç «0» ve «1» değerlerine karşılık gelmektedir. 1 değeri belli bir denemenin başarılı olmasını, 0 ise başarısız olmasını ifade eder.

Bernoulli Dağılımı

Tanım: X rasgele değişkeni 0 ve 1 değerlerini alsın. X'in olasılık fonksiyonu;

$$P(X=1) = p \quad \text{ve} \quad P(X=0) = 1 - p = q \quad \text{olmak üzere}$$

$$f(x) = P(X=x) = p^x \cdot q^{1-x}; x=1,0 \text{ 'dır.}$$

Bu dağılıma Bernoulli dağılımı denir.

Teorem: Bernoulli dağılımının ortalaması (X'in beklenen değeri) ve varyansı şu şekilde hesaplanır;

➤ $\mu = E(X) = p$

➤ $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = p \cdot q = p \cdot (1-p)$

Bernoulli Dağılımı

İspat: $\mu = E(X) = \sum_{x=0}^1 x \cdot f(x)$ olmak üzere

$$= \sum_{x=0}^1 x \cdot p^x \cdot q^{1-x} = p \text{ elde edilir.}$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^1 x^2 \cdot p^x \cdot q^{1-x} = p \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - [E(X)]^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p) = p \cdot q$$

Bernoulli Dağılımı

Örnek: Ardışık 3 Bernoulli denemesinde başarılı sonuç gelme olasılığı 0,008 ise üç denemenin üçünün de başarısız olma olasılığını bulalım.

- $p \cdot p \cdot p = 0,008$ olduğuna göre;
- $p = 0,2$
- $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$ olmak üzere;
- $q^3 = (0,8)^3 = 0,512$

Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

Tanım: Birbirinden bağımsız n Bernoulli denemesinden başarılı olanların toplam sayısı X rasgele değişkeni olsun. Bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p , başarısız olma olasılığı q ise şu koşulları sağlayan X 'e binom rasgele değişkeni denir;

1. Deney n özdeş denemeden oluşmaktadır.
2. Her bir deneme için başarı/başarısızlık olmak üzere yalnız iki sonuç vardır.
3. Tek deneme için başarı olasılığı olan p her deneme için aynıdır.
4. Denemeler birbirinden bağımsızdır.

Binom Dağılımı

Teorem: Birbirinden bağımsız n Bernoulli denemesi için X , her denemede başarı olasılığı p , başarısızlık olasılığı q olan binom rasgele değişkeni ise, X 'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} ; x = 0, 1, 2, \dots, n \text{ 'dir.}$$

Bu dağılıma Binom dağılımı denir.

Binom Dağılımı

İspat: Bir deneyde Başarılı (olumlu) sonuç elde etme ve olasılığı p ve Başarısız (olumsuz) sonuç elde etme ve olasılığı $(1-p)$ olsun. Bu deneyler art arda n kez tekrarlansın ve başarılı sonuç x kez, başarısız sonuç $(n-x)$ kez gözlenmiş olsun.

$$P \left\{ \begin{array}{l} \text{İlk } x \text{ deney olumlu,} \\ \text{Geri kalan } (n-x) \text{ deney olumsuz} \end{array} \right\} = \overbrace{p.p.p \dots p}^{x \text{ kez}} \cdot \overbrace{(1-p).(1-p) \dots (1-p)}^{n-x \text{ kez}} \\ = p^x \cdot (1-p)^{n-x} \text{ olur.}$$

Bu sonuçlar $\binom{n}{x}$ farklı sırada elde edileceğinden,

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Binom Dağılımı

Örnek: Bir para 4 kere atılsın. İki tura, en az bir tura, birden fazla tura gelme olasılıklarını hesaplayalım.

- Deney iki sonuçlu rassal bir değişken olduğundan Binom Dağılımı'na uyar.
- Dört atışta T'lerin sayısı X ol. üz., X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$n = 4, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4; \quad p=1/2 \quad \text{ve} \quad q=1/2$$

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \\ &= \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Binom Dağılımı

a) 2 tura gelme olasılığı: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

b) En az 1T gelme olasılığı: $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
 $= 1 - P(X = 0) = 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} \right] = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

c) Birden fazla T geleme olasılığı: $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
 $= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$

Binom Dağılımı

Örnek: Bir bölgedeki bir araştırmada, 20 yaşından küçük kızların %60'ının evlendirildiği bulunmuştur. Bu bölgeden 20 yaşın altında 3 kızla karşılaşıldığında;

- a) Üç kızın da evli olma olasılığını,
 - b) En az bir kızın evli olma olasılığını,
 - c) En fazla iki kızın evli olma olasılığını bulunuz.
 - d) X rassal değişkenin olasılık dağılımını yazınız ve grafiğini çiziniz.
- x: Evli kız sayısını (rassal değişken, $x = 0, 1, 2, 3$); n: Toplam kız sayısını ve $(n-x)$: Bekar kız sayısını gösterebilir.
- $p = P(\text{evli}) = 0,60$; $q = P(\text{bekar}) = 1 - p = 1 - 0,60 = 0,40$

Binom Dağılımı

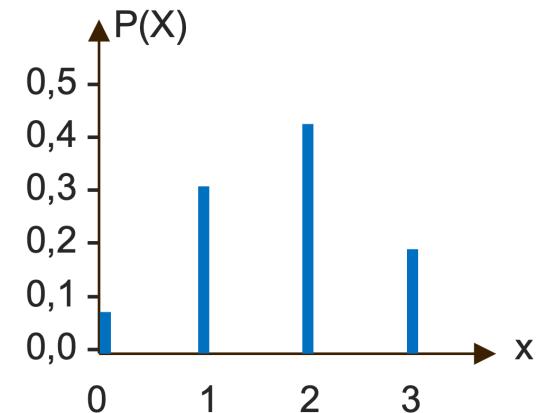
a) $P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^0 = 0,216$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^3 = 1 - 0,064 = 0,936$

c) $P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) = 1 - \binom{3}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^0 = 1 - 0,216 = 0,784$

d) $P(X) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
 $= \binom{3}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^3 + \dots + \binom{3}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^0 = 1$

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,064	0,288	0,432	0,216



Binom Dağılımı

Örnek: Kız ya da erkek çocuğu doğması olasılığının eşit olduğu varsayımı altında 5 çocuklu bir ailede 2 erkek çocuk olmasının olasılığı nedir?

- 5 çocuklu ailede erkek çocukların sayısı X olsun.
- $n = 5$; $p = 1/2$; $q = 1/2$ olmak üzere;

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^{5-2} = 10/32$$

Binom Dağılımı

Örnek: 20 parçanın bulunduğu bir çuvalda 5 parça kusurludur. Çekilen yine yerine koyularak 4 parça seçilmiştir.

a) Seçilen parçalardan yalnız birinin kusurlu olma olasılığı nedir?

- Çekilen kusurlu parçaların sayısı X olsun ($x = 0, 1, 2, 3, 4$)
- $n = 4$; $p = 5/20$; $q = 15/20$ olmak üzere;

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot (0,25)^1 \cdot (0,75)^{4-1} = 27/64$$

Binom Dağılımı

b) En az bir kusurlu parça çekilme olasılığı nedir?

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \binom{4}{0} \cdot (0,25)^0 \cdot (0,75)^4$$

$$= 1 - 81/256 = 175/256$$

Binom Dağılımı

Tanım: Binom dağılımı aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- Binom dağılımının parametreleri **n** ve **p** 'dir.
- Binom Dağılımı'nın olasılıkları toplamı **1**'dir.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n-x} = (p + q)^n = 1$$

- Eğer $p = 0,5$ ise, Binom dağılımı simetriktir.
- Eğer $p < 0,5$ ise, Binom dağılımı sağa çarpıktır.
- Eğer $p > 0,5$ ise, Binom dağılımı sola çarpıktır.

Binom Dağılımı

Teorem: X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu ,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1 - p)^{n-x} , \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{olmak üzere}$$

➤ Binom Dağılımı'nın ortalaması:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = p + p + \dots + p \quad \text{olur. Yani;}$$

$$\mu = E(X) = \mathbf{np} \text{ 'dir.}$$

➤ Binom Dağılımı'nın varyansı:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

$$\sigma^2 = pq + pq + \dots + pq = \mathbf{npq} \text{ 'dir.}$$

Binom Dağılımı

Örnek: Bir para 64 kere atılsın. Bulunan turaların sayısının ortalamasını ve standart sapmasını bulalım.

- X rasgele değişkeni 64 denemede ki turaların sayısı olsun. O halde X, ($p=1/2$; $n=64$) binom dağılımına sahiptir. Bu nedenle sırasıyla
- $\mu = E(X) = np$
 $= 64 (1/2) = 32$
- $\sigma^2 = \text{Var}(X) = npq$
 $= 64 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 16$
- $\sigma = \sqrt{16} = 4$

Çok Terimli Dağılım

- Bu dağılım, Binom dağılımının k tane olay için genişletilmiş şeklidir.

Tanım: $A_1, A_2, \dots, A_k$ bir deneyin ayırık sonuçları olsun. $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ rasgele değişkeni n bağımsız denemede her bir A_i 'nin elde edilmiş sayısını göstermek üzere bir tek denemede A_i 'nin elde edilme olasılığı p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) olsun. Bu durumda X_i rasgele değişkene çok terimli rasgele değişken denir.

- Bir zarın n kere atılması
- Bir torbadaki siyah, kırmızı, yeşil toplar arasından yerine koyarak ardışık olarak n topun çekilmesi
- 52'lik desteden yerine koyarak ardışık olarak kart çekilmesi

Çok Terimli Dağılım

Teorem: k tane sonucu olan bir deneyde A_1 olayı p_1 , A_2 olayı p_2 , $\dots$, A_k olayı p_k olasılığı ile gerçekleşsin. Burada,

$$\sum_{i=1}^k x_i = n \text{ ve } \sum_{i=1}^k p_i = 1 \text{ 'dir.}$$

Deneyler birbirinden bağımsız olmak üzere n kez tekrarlandığında A_1 olayının x_1 , A_2 olayının x_2 , $\dots$, A_k olayının x_k kere rastlanması olayı,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

$$x_i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ ve } i = 1, 2, 3, \dots, k \text{ olur.}$$

Bu olasılık fonksiyonuna sahip olan dağılıma **çok terimli dağılım** denir.

Çok Terimli Dağılım

Örnek: Bir kavanozda 5 siyah, 4 kırmızı ve 2 yeşil top vardır. Yerine koyarak ve karıştırarak ardışık olarak 6 top çekiliyor. 2 siyah, 3 kırmızı ve 1 yeşil top çekme olasılığı nedir?

- (X_1, X_2, X_3) rassal değişkeni ile çekilen siyah, kırmızı ve yeşil topları gösterelim.
- Burada, $n=6$; $p_1 = \frac{5}{11}$, $p_2 = \frac{4}{11}$, $p_3 = \frac{2}{11}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ve $x_3 = 1$ olur.

$$f(2,3,1) = P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1) = \frac{6!}{2!3!1!} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^2 \left(\frac{4}{11}\right)^3 \left(\frac{2}{11}\right)^1 = 0,40$$

Çok Terimli Dağılım

Teorem: $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ rassal değişkeni çok terimli dağılıma sahip olsun. Bu durumda;

- Çok terimli dağılımın ortalaması:

$$\mu = E(X_i) = n \cdot p_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

- Çok terimli dağılımın varyansı:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

olarak hesaplanır.

Çok Terimli Dağılım

Örnek: 250 TV izleyicisinin 100'ü haberleri, 95'i belgeselleri ve 55'i tartışma programlarını TV'deki birçok seçenek arasından ilk sırada tercih etmektedir.

a) Bu izleyiciler arasından rastgele seçilen 40 kişiden 18'inin haberleri, 14'ünün belgeselleri ve 8'inin tartışma programlarını izleme olasılığı nedir?

➤ Burada, $n=40$; $x_1 = 18$, $x_2 = 14$, $x_3 = 8$; $p_1 = \frac{100}{250}$, $p_2 = \frac{95}{250}$, $p_3 = \frac{55}{250}$ ol.üz.;

$$\begin{aligned} P(X_1 = 18, X_2 = 14, X_3 = 8) &= \frac{40!}{18! 14! 8!} \cdot \left(\frac{100}{250}\right)^{18} \left(\frac{95}{250}\right)^{14} \left(\frac{55}{250}\right)^8 \\ &= 0,01789 \end{aligned}$$

Çok Terimli Dağılımı

b) 40 kişiden kaçının haberleri, kaçının belgeselleri ve kaçının tartışma programlarını izlemesi beklenir?

$$E(X_1) = n \cdot p_1 = 40 \cdot \frac{100}{250} = 16$$

$$E(X_2) = n \cdot p_2 = 40 \cdot \frac{95}{250} = 15,2$$

$$E(X_3) = n \cdot p_3 = 40 \cdot \frac{55}{250} = 8,8$$

Geometrik Dağılım

Tanım: Bağımsız Bernoulli denemelerinin bir dizisinde her bir deneme için başarı olasılığı p ve ilk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısı X rasgele değişkeni olsun. Bu taktirde X 'e geometrik rasgele değişken denir.

- Bir paranın tura gelinceye kadar atılması. X , ilk turayı bulmak için gerekli atış sayısıdır.
- Bir kutudaki kusurlu/kusursuz parçalar arasından ilk kusursuz parçayı seçene kadar yapılan seçimlerin sayısı

Geometrik Dağılım

Tanım: X, bir tek denemede başarı olasılığı p ve başarısızlık olasılığı 1-p=q olan geometrik rasgele değişken ise, X'in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X=x) = q^{x-1} \cdot p ; x = 1, 2, \dots \text{ 'dir.}$$

Bu olasılık fonksiyonuna sahip olan dağılıma **Geometrik dağılım** denir.

Geometrik Dağılım

İspat: İlk başarının elde edilmesi için gereken denemelerin sayısı X ; 1, 2, ... değerlerinden biri olabilir. Bu durumda x başarıdan önceki başarısızlıkların sayısı $x-1$ olur. Yani;

$$\begin{aligned} & \overbrace{(1-p) \cdot (1-p) \dots (1-p)}^{x-1 \text{ kez}} \cdot \overset{x. \text{ deneme}}{\uparrow} p \\ &= (1-p)^{x-1} \cdot p \\ &= q^{x-1} \cdot p \end{aligned}$$

Geometrik Dağılım

Örnek: Bir zarı 1 elde edinceye kadar atalım. **a)** Bağımsız atışlar dizisinde ilk 1'in elde edilmesi için gereken atışların sayısının olasılık fonksiyonu nedir?

- İlk 1'in elde edilmesi için gereken atışların sayısı X rasgele değişkeni olsun.
- $p = 1/6$ ve $q = 1 - p = 5/6$ olmak üzere X 'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right), \quad x = 1, 2, \dots \text{ ' dır.}$$

b) 3. atışta 1 bulmanın olasılığı nedir?

$$f(3) = P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$$

Geometrik Dağılım

Teorem: X rasgele değişkeni $f(x) = q^{x-1} \cdot p$ olasılık fonksiyonlu Geometrik dağılıma sahip olsun. Bu durumda;

➤ Geometrik dağılımın ortalaması:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

➤ Geometrik dağılımın varyansı:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

olarak hesaplanır.

Geometrik Dağılım

Örnek: $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sayıları arasından rasgele bir sayı seçilecek ve bu işlem ilk 0 gelene kadar devam edecektir. İlk 0'ı elde etmek için yapılan çekilişlerin sayısı X olmak üzere, X 'in olasılık fonksiyonunu bulunuz, dağılımın ortalamasını ve varyansını hesaplayınız.

$$f(x) = P(X=x) = q^{x-1} \cdot p = \left(\frac{9}{10}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)' \text{ dır.}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,9}{0,1^2} = 90$$

Sorunuz?