



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-I / Rasgele Değişkenler ve Dağılımları -2

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

İki Boyutlu Rasgele Değişkenler

- Bir deney yapıldığında, aynı deneyle ilgili iki rasgele değişkenin aynı andaki durumunu incelemek isteyebiliriz.
- Bu durum kesikli ya da sürekli halde iki boyutlu (veya iki değişkenli) rasgele değişkenler olarak isimlendirilir.

İki Boyutlu Rasgele Değişkenler

Örnek: Düzgün bir paranın 3 kere atılması deneyinde gelen turaların sayısı X , ilk iki atışta gelen turaların sayısı Y olsun. Bu durumda S örnek uzayı;

S	X'in değerleri	Y'nin değerleri
TTT	3	2
TTY	2	2
TYT	2	1
YTT	2	1
TTY	1	1
YTY	1	1
YYT	1	0
YYY	0	0

- Bu durumda X ve Y değerlerinin her bir çifti için karşılık gelen olasılıklar şu şekilde gösterilir;

$$P(X=0, Y=0) = 1/8$$

$$P(X=1, Y=1) = 1/4$$

- Burada virgül aslında kesişim ($\cap$) olarak kullanılmaktadır.

$$\text{Yani } P(X=0, Y=1) = P(\emptyset) = 0 \text{ 'dır.}$$

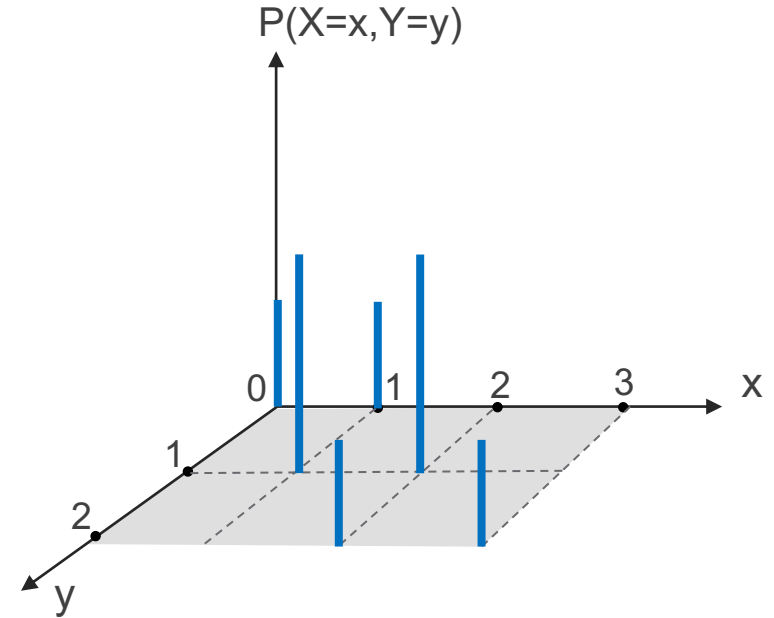
İki Boyutlu Rasgele Değişkenler

Bu durumda $X=i$ ($i=0,1,2,3$) ve $Y=j$ ($j=0,1,2$) için $P(X=i, Y=j)$ ortak olasılık tablosu;

$X_i \backslash Y_j$	0	1	2	TOPLAM
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	1/4	0	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
TOPLAM	1/4	1/2	1/4	1

X'in olasılık fonksiyonu

Y'nin olasılık fonksiyonu



➤ Peki $X=1$ olayının olasılığı nedir?

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Tanım: (X,Y) sıralı ikilisi bir S örnek uzayında tanımlanan iki boyutlu kesikli bir rassal değişken olsun. (X,Y) 'nin alabileceği değerler (x_i, y_j) $i = 1,2,3, \dots, M$ ve $j = 1,2,3, \dots, N$ ise,

$$f(x_i, y_j) \geq f_{xy}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

fonksiyonuna X ve Y rassal değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonu (OOF) denir.

Burada belirtilen $f(x_i, y_j)$ fonksiyonu şu koşulları sağlamalıdır;

➤ $f(x_i, y_j) \geq 0$, tüm (x,y) değerleri için

➤
$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) = 1$$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

X ve Y rassal değişkenlerine ait JOF aşağıdaki tabloda gösterilen formdadır.

X \ Y	y₁	y₂	...	y_N	P(X=x)
x ₁	f(x ₁ , y ₁)	f(x ₁ , y ₂)	...	f(x ₁ , y _N)	f(x ₁)
x ₂	f(x ₂ , y ₁)	f(x ₂ , y ₂)	...	f(x ₂ , y _N)	f(x ₂)
...	...	...	...	...	...
x _i	f(x _i , y ₁)	f(x _i , y ₂)	...	f(x _i , y _N)	f(x _i)
...	...	...	...	...	...
x _M	f(x _M , y ₁)	f(x _M , y ₂)	...	f(x _M , y _N)	f(x _M)
P(Y=y)	f(y ₁)	f(y ₂)	...	f(y _N)	1

Tablodaki son sütun X'in olasılık dağılımlarını verir, buna X'in marjinal olasılık fonksiyonu denir ve şu şekilde gösterilir:

$$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

$$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Örnek: Bir kimyasal proste, prosese eklenen X ve Y maddelerinin miktarları karışımın özelliğini etkilemektedir. Bu etkileşim tablosu yanda verilmiştir.

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	0	0	10	20
1	10	10	0	10
2	20	0	10	10

a) X ve Y 'nin ortak olasılık fonksiyonunu yazınız.

➤ $P(X=0, Y=1) = 0/100 = 0$;

➤ $P(X=1, Y=1) = 10/100 = 0,1$;

...

➤ $P(X=2, Y=4) = 10/100 = 0,1$;

$X \backslash Y$	1	2	3	4	TOPLAM
0	0	0	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,1	0	0,1	0,3
2	0,2	0	0,1	0,1	0,4
TOPLAM	0,3	0,1	0,2	0,4	1

Ortak Olasılık Fonksiyonu

b) X rassal değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

$X=x$	0	1	2
$g(x) = P(X=x)$	0,3	0,3	0,4

c) Y rassal değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

$Y=y$	1	2	3	4
$h(y) = P(Y=y)$	0,3	0,1	0,2	0,4

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Örnek: Bir kutuda 3 beyaz, 2 siyah, 4 kırmızı top bulunmaktadır. Bu kutudan rasgele 2 top seçildiğinde beyaz topların sayısı X , siyah topların sayısı Y olmak üzere, X ve Y 'nin tüm olanaklı değer çiftleri için ilgili olasılıkları bulunuz. Ortak olasılık fonksiyonunu belirleyiniz, X ve Y 'nin marjinal olasılık fonksiyonlarını yazınız.

- Torbadan 2 top seçildiğinde olası (X,Y) durumları şu şekilde olacaktır;
 $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Çekilen iki topun kırmızı olması durumu yani $P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36}$

Çekilen 1 topun beyaz 1 topun kırmızı olması $P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{12}{36}$

X \ Y	0	1	2
0	1/6	2/9	1/36
1	1/3	1/6	0
2	1/12	0	0

Bu durumda (X,Y) çiftleri için $f(x,y)=P(X=x, Y=y)$ OOF;

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{2}{y} \cdot \binom{4}{2-x-y}}{\binom{9}{2}} \quad \begin{array}{l} x = 0, 1, 2 \\ y = 0, 1, 2 \\ 0 \leq x+y \leq 2 \end{array}$$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

➤ X'in marjinal olasılık fonksiyonu;

$X=x$	0	1	2
$g(x) = P(X=x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

➤ Y'nin marjinal olasılık fonksiyonu;

$Y=y$	0	1	2
$h(y) = P(Y=y)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım: X ve Y sürekli rassal değişkenler ise aşağıdaki koşulları sağlayan f fonksiyonuna (X,Y) 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (OOFY) denir;

➤ $f(x,y) \geq 0$, tüm x ve y 'ler için

➤
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = 1$$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Örnek: İki boyutlu sürekli (X,Y) rasgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde verilmiş olsun;

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & ; 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu kanıtlayalım ve $B = \{X+Y \geq 1\}$ olayının olasılığını bulalım.

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Çözüm: Önce aşağıdaki eşitliği kontrol edelim;

$$\int_{y=0}^2 \int_{x=0}^1 (x^2 + \frac{xy}{3}) \cdot dx \cdot dy = \int_{y=0}^2 (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6}) \Big|_0^1 \cdot dy = \int_{y=0}^2 (\frac{1}{3} + \frac{y}{6}) \cdot dy = (\frac{y}{3} + \frac{y^2}{12}) \Big|_0^2 = 1$$

B olayının olasılığını $P(B) = 1 - P(B')$ şeklinde hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} B' = \{X+Y < 1\} \text{ olmak üzere } P(B) &= 1 - \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} (x^2 + \frac{xy}{3}) \cdot dx \cdot dy \\ &= 1 - \int_{y=0}^1 (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6}) \Big|_0^{1-y} \cdot dy = 1 - \int_{y=0}^1 (\frac{(1-y)^3}{3} + \frac{(1-y)^2 y}{6}) \cdot dy \\ &= 1 - (\frac{y}{3} - \frac{5y^2}{12} + \frac{2y^3}{9} - \frac{1y^4}{24}) \Big|_0^1 = 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72} \end{aligned}$$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım: Rasgele değişkenlerin biri sabit tutulup sadece diğeri üzerinde hesaplanan olasılığa marjinal olasılık denir.

- $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$: X'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu
- $h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$: Y'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Örnek: Özel bir şirket, müşterilerine yürüyüş gezisi ve araba gezisi imkanı sunmaktadır. Rasgele bir gün seçildiğinde, X rasgele değişkeni yürüyüş gezisini, Y rasgele değişkeni araba gezisini göstermek üzere ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & ; 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{dd} \end{cases}$$

Buna göre, X ve Y değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

a) X'in M-marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2}{5} (2x + 3y) dy \\ &= \frac{2}{5} 2xy + \frac{3}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{5} \left(2x + \frac{3}{2} \right), 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} \left(2x + \frac{3}{2} \right) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer } x \text{ için} \end{cases}$$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

b) Y'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{2}{5} (2x + 3y) dx \\ &= \frac{2}{5} x^2 + 3xy \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5} (1 + 3y), 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{2}{5} (1 + 3y) & ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer } y \text{ için} \end{cases}$$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Örnek: X ve Y sürekli değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir;

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} (6 - x - y) & ; 0 \leq x \leq 2 ; 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

a) $P(X \leq 1; Y \leq 3)$ olasılığını hesaplayınız.

b) $P(X+Y \leq 3)$ olasılığını hesaplayınız

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \leq 3) &= \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^3 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 6y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=3} dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{8}x \right) dx \\ &= \frac{7}{16}x - \frac{1}{16}x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

b)

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 3) &= \int_0^1 \int_2^{3-x} \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 6y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=3-x} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \left(6(3-x) - x(3-x) - \frac{(3-x)^2}{2} - 12 + 2x + 2 \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{7x}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım: X ve Y , $f(x,y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iki boyutlu sürekli rassal değişkenler olsun. $g(x)$ X 'in, $h(y)$ Y 'nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

➤ $Y=y$ verilmişken X 'in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

➤ $X=x$ verilmişken Y 'nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Örnek: Bir önceki soru için $P(X \leq 1 / Y \leq 3)$ olasılığını hesaplayalım.

$$P(X \leq 1 / Y \leq 3) = \frac{P(X \leq 1, Y \leq 3)}{P(Y \leq 3)} \text{ olmak üzere;}$$

$$P(Y \leq 3) = P(0 < x < 2 ; Y \leq 3)$$

$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=2}^3 \frac{1}{8} (6 - x - y) \cdot dx \cdot dy = \frac{5}{8}$$

$$P(X \leq 1 / Y \leq 3) = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

Ortak Dağılım Fonksiyonu

Tanım: (X,Y) iki boyutlu (kesikli veya sürekli) rassal değişken olsun. (X,Y) 'nin ortak dağılım fonksiyonu;

$F(X,Y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ eşitliği ile tanımlanır.

➤ Bu durumda kesikli değişkenler için ortak dağılım fonksiyonu;

$$F(X, Y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f(x, y)$$

➤ Sürekli değişkenler için ortak dağılım fonksiyonu;

$$F(X, Y) = \int_{y=-\infty}^y \int_{x=-\infty}^x f(x, y) dx \cdot dy$$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Tanım: X ve Y sürekli veya kesikli rassal değişkenler, $f(x,y)$ ortak olasılık fonksiyonu, $g(x)$ ve $h(y)$ marjinal olasılık fonksiyonları olmak üzere;

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

koşulu sağlanıyorsa, X ve Y rassal değişkenleri istatistiksel bağımsızdır denir.

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Örnek: X ve Y rasgele değişkenleri bağımsızdır ve marjinal olasılık fonksiyonları şu şekilde verilmiştir.

$X=x$	1	2
$g(x) = P(X=x)$	0,6	0,4

$Y=y$	5	10	15
$h(y) = P(Y=y)$	0,2	0,5	0,3

Buna göre X ve Y sikli rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Y \ X	1	2	h(y)
5	$g(1) \cdot h(5) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$	$g(2) \cdot h(5) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$	0,2
10	$g(1) \cdot h(10) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$	$g(2) \cdot h(10) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$	0,5
15	$g(1) \cdot h(15) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$	$g(2) \cdot h(15) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$	0,3
g(x)	0,60	0,40	1

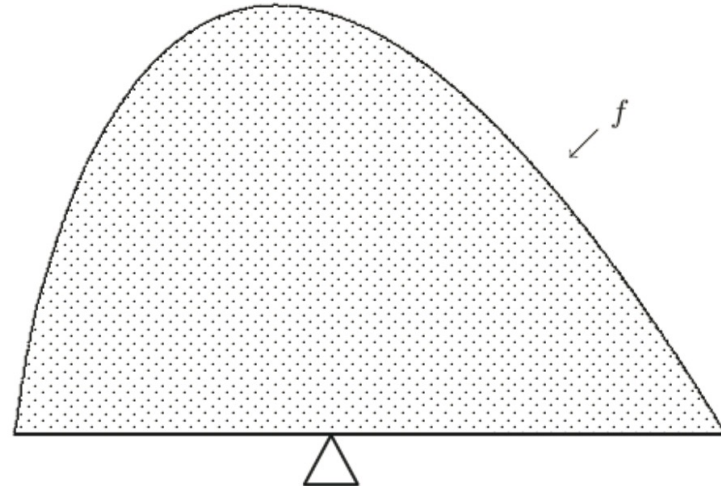
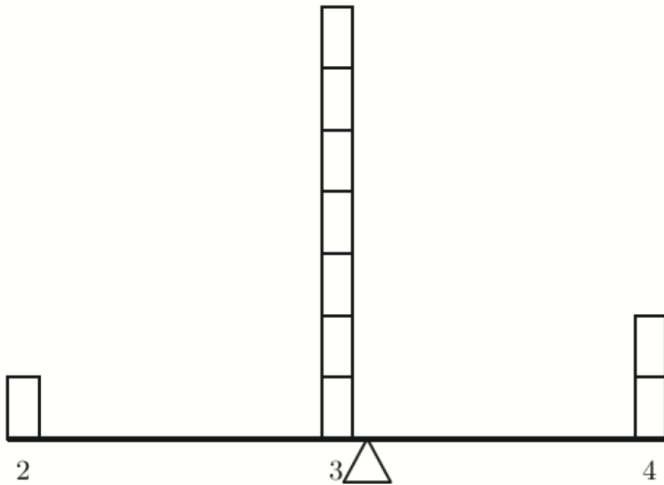
Ortak Olasılık Fonksiyonu

Tanım: $X_1, X_2, \dots, X_n$ kesikli veya sürekli rasgele değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ fonksiyonudur ve aşağıdaki şartları sağlamaktadır;

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$
- $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ (kesikli rasgele değişkenler için)
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ (sürekli rasgele değişkenler için)

Beklenen Değer

- Beklenen değer, bir olayın veya rastgele bir değişkenin uzun vadeli ortalama değerini temsil eder.
- Bu değer, bir olayın tekrarlanması durumunda elde edilen sonuçların ağırlıklı ortalaması olarak düşünülebilir.



Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Tanım: X , aşağıdaki olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rassal değişken olsun.

$X = x$	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$f(x)=P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_N)$

X 'in $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_N \cdot f(x_N)$$

$$= \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i)$$

X rassal değişkeni sayılabilir sonsuzlukta değerler alıyorsa $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f(x_i)$

Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

- $E(X)$ sayısına ayrıca X rassal değişkenin ortalaması ya da kitle ortalaması da denir.
- Fakat ortalama genellikle μ ile gösterilir.
- Birden fazla rassal değişken olması durumunda ($X, Y, Z, \dots$ gibi), μ 'ler ortalamaları göstermek üzere,

$$E(X) = \mu_X \text{ ve } E(Y) = \mu_Y \text{ şeklinde gösterilir.}$$

- Yalnız bir rasgele değişkenin olduğu durumlarda

$$E(X) = \mu_X = \mu \text{ ifadesi kullanılır.}$$

Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Örnek: Düzgün altı yüzlü bir zar atalım. Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının beklenen değeri nedir?

- Üste gelen sayıları X ile gösterelim. X 'in olanaklı değerleri (S örnek uzayı) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve her bir elemanın olasılığı $1/6$ olduğuna göre;

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6} = 3,5 \end{aligned}$$

Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Örnek: Bir parayı 3 kere atma deneyinde bulunan T'lerin beklenen değeri nedir?

Örnek uzayı	T	Olasılık
TTT	3	1/8
TTY	2	1/8
TYT	2	1/8
YTT	2	1/8
TTY	1	1/8
YTY	1	1/8
YYT	1	1/8
YYY	0	1/8

Toplam olasılık = 1

Tura sayısına X dersek;

$X = x$	0	1	2	3
$f(x) = P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \cdot f(x_i) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kesikli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Örnek: İçinde 3 beyaz ve 2 siyah top bulunan bir kavanozdan yerine koyarak 2 top çekilmiştir. Çekilen her beyaz top için 100 lira kazanılacak, çekilen her siyah top için ise 50 lira kaybedilecektir. Oyunda beklenen kar nedir?

$$\begin{aligned} P(\text{Beyaz, Beyaz}) &= \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{9}{25} (100 + 100 = +200) \\ P(\text{Beyaz, Siyah}) &= \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{6}{25} (100 - 50 = +50) \\ P(\text{Siyah, Beyaz}) &= \frac{2}{5} * \frac{3}{5} = \frac{6}{25} (-50 + 100 = +50) \\ P(\text{Siyah, Siyah}) &= \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{4}{25} (-50 - 50 = -100) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} E(X) &= 200 * \frac{9}{25} + 50 * \frac{6}{25} + 50 * \frac{6}{25} - 100 * \frac{4}{25} \\ &= 80 \text{ lira} \end{aligned} \right.$$

Sürekli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

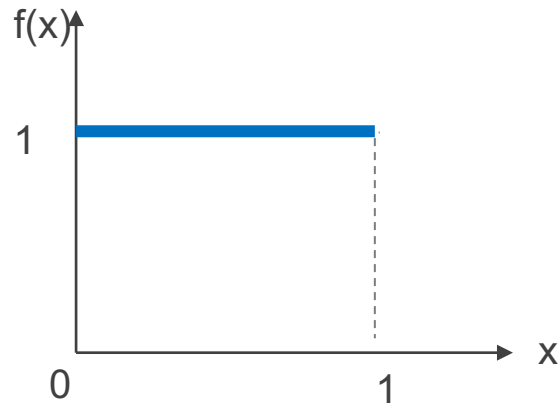
Tanım: X sürekli rassal değişken olsun. $f(x)$, X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X 'in beklenen değeri (ortalaması) $E(X)$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \, dx, \quad -\infty < x < \infty$$

Sürekli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Örnek: X , sürekli bir rassal değişken olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir. $f(x)$ 'in beklenen değerini bulalım ve grafiğini çizelim.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; x \geq 1 \end{cases}$$



Buna göre;

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1/2 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Sürekli Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

Örnek: X bir pilin ömür süresini olmak üzere, X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. X'in beklenen değerini bulalım.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{dd} \end{cases}$$

Buna göre;

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot dx \\ &= \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = 3/4 \text{ 'dür.} \end{aligned}$$

Beklenen Değerin Özellikleri

Tanım: Kesikli X rassal değişken için olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Y , X 'in fonksiyonu olsun. Bu durumda yeni rassal değişken $Y = g(x)$ olur ve bu fonksiyonun beklenen değeri:

$X = x$	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$f(x)=P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_N)$

$$E[g(x)] = g(x_1) \cdot f(x_1) + g(x_2) \cdot f(x_2) + \dots + g(x_N) \cdot f(x_N) \quad \text{veya,}$$

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i) \cdot f(x_i) \quad \text{olur.}$$

➤ X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rassal değişken ise;

$$E[g(X)] = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad \text{olur.}$$

Beklenen Değerin Özellikleri

Örnek: X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$f(x)=P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

a) $E(X^2) = ?$

$X = x$	1	4	9	16	25	36
$f(x)=P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

b) $E(2X) = ?$

$X = x$	2	4	6	8	10	12
$f(x)=P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(2X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Beklenen Değerin Özellikleri

Örnek: X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekildedir;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{dd} \end{cases}$$

Bu durumda $g(x) = 4X + 3$ rasgele değişkeninin beklenen değeri nedir

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad \text{olmak üzere;}$$

$$= \int_{-1}^2 (4x + 3) \cdot \frac{x^2}{3} \cdot dx$$

$$= \int_{-1}^2 \left(\frac{4x^3}{3} + x^2 \right) \cdot dx = \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-1}^{x=2} = 8$$

Sorularınız?