



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



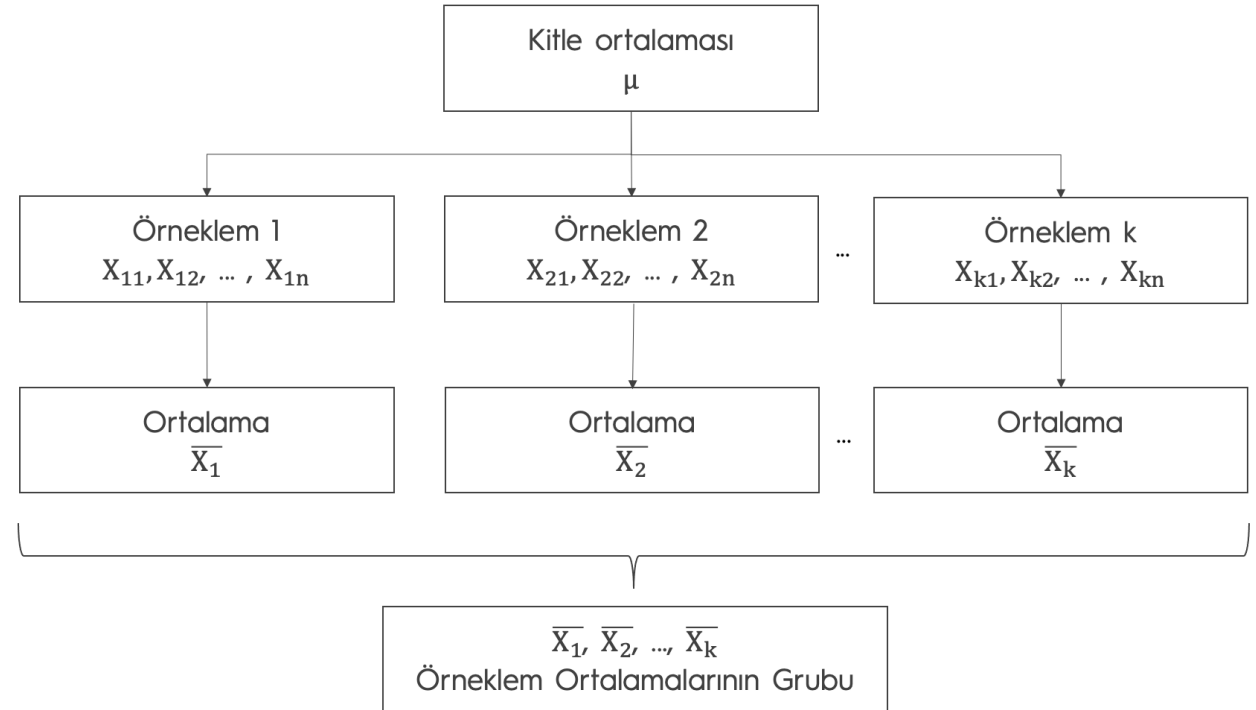
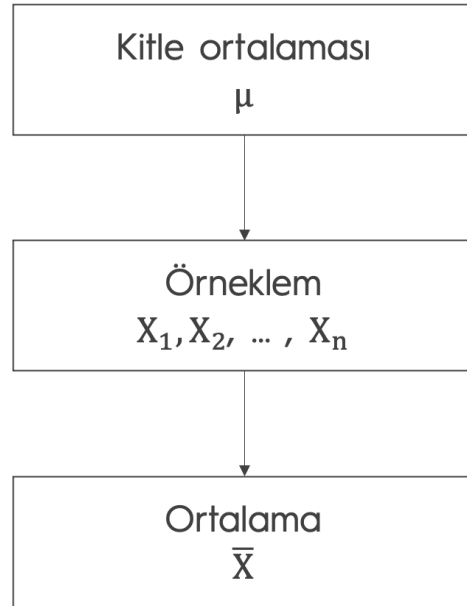
Mühendislik İstatistiği-II / Örneklem Dağılımları

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Örnekleme İstatistiklerinin Dağılımı

- Bir istatistikçi sonlu veya sonsuz sayıda birim içeren bir yığının özelliğini araştırmak isteyebilir. Yığının bütün elemanlarına ulaşp inceleyebilirse **tamsayım** yapmış olur.
- Zaman, maliyet ve fiziksel koşullar nedeniyle tamsayımla bilgi toplayamaz ise, yığından rastgele birimleri seçerek oluşturduğu alt kümeye **örnek** veya **örneklem** denir. Örneklemi inceleyerek yığın için tahmine dayalı bilgi elde etmeye **örnekleme** denir.
- $\bar{X}$, S, Medyan, DA gibi parametreler birer istatistiktir. İstatistiklerin olasılık dağılımına **örnekleme dağılımı** denir.
- Bir yığın parametresini tahmin etmek için yığın yerine örneklemin kullanılmasından oluşan hataya yani $(\bar{X} - \mu)$ farkına **örnekleme hatası** denir.

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı



$\bar{X}$ 'nin Beklenen Değeri

Teorem: $X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal değişkenler ve $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ olmak üzere her bir rassal değişkenin beklenen değeri μ ise, $E(\bar{X}) = \mu$ 'dür.

Hatırlatma: X aşağıdaki olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rasgele değişken olsun.

$X=x$	x_1	x_2	...	x_N
$f(x) = P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_N)$

X 'in $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri;

$$E(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f(x_i)$$

$$E(X) = \mu$$

$\bar{X}$ 'nin Beklenen Değeri

$$\begin{aligned}\text{İspat: } E(\bar{X}) &= E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n} (E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]) \\ &= \frac{1}{n} (\mu + \mu + \dots + \mu) = \frac{1}{n} n\mu = \mu\end{aligned}$$

Örnek: Kitle 2, 4, 6, 8, 10 olarak verilsin. Yerine koymaksızın bu kitleden 2 birimlik örneklem seçilmek istendiğinde, örneklem ortalamasının beklenen değeri nedir?

$\bar{X}$ 'nin Beklenen Değeri

Çözüm: Kitle ortalaması $\mu = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$ 'dır

➤ 5 kitleden 2'li seçim $\binom{5}{2} = 10$ farklı şekilde gerçekleştirilir.

Örneklem	Örneklem Ortalaması ($\bar{X}$)	Olasılık
2,4	$(2 + 4)/2 = 3$	1/10
2,6	$(2 + 6)/2 = 4$	1/10
2,8	$(2 + 8)/2 = 5$	1/10
2,10	$(2 + 10)/2 = 6$	1/10
4,6	$(4 + 6)/2 = 5$	1/10
4,8	$(4 + 8)/2 = 6$	1/10
4,10	$(4 + 10)/2 = 7$	1/10
6,8	$(6 + 8)/2 = 7$	1/10
6,10	$(6 + 10)/2 = 8$	1/10
8,10	$(8 + 10)/2 = 9$	1/10

$\bar{X}$ 'nin Beklenen Değeri

Çözüm:

$\bar{X} = x$	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)P(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E[\bar{X}] = 3 * \frac{1}{10} + 4 * \frac{1}{10} + 5 * \frac{2}{10} + 6 * \frac{2}{10} + 7 * \frac{2}{10} + 8 * \frac{1}{10} + 9 * \frac{1}{10} = 6$$

$$\text{Yani } E[\bar{X}] = \mu = 6$$

$\bar{X}$ 'nin Varyansı

Teorem: $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız rassal değişkenler için $E(\bar{X}) = \mu$ ve $\text{Var}(X_i) = \sigma_x^2$ ol. üz.

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ 'dir.}$$

Hatırlatma: X 'in ortalaması $E(X) = \mu$ ise X 'in varyansı $\text{Var}(X)$ veya σ_x^2 şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_i) = \sigma_x^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

$\bar{X}$ 'nin Varyansı

$$\begin{aligned}\text{İspat: } \text{Var}(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - \mu)^2] \\&= E\left[\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{n\mu}{n}\right)^2\right] \\&= E\left[\left(\frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)}{n}\right)^2\right] \\&= E\left[\frac{(X_1 - \mu)^2}{n^2} + \dots + \frac{(X_n - \mu)^2}{n^2} + 2\left(\frac{(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)}{n^2} + \dots + \frac{(X_{n-1} - \mu)(X_n - \mu)}{n^2}\right)\right] \\&= \frac{1}{n^2} \left(E[(X_1 - \mu)^2] + \dots + E[(X_n - \mu)^2]\right) + \frac{2}{n^2} \left(\underbrace{E[(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)]}_{=0, \text{ (Bağımsız)}} + \dots + \underbrace{E[(X_{n-1} - \mu)(X_n - \mu)]}_{=0, \text{ (Bağımsız)}}\right) \\&= \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)) = \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

$\bar{X}$ 'nin Varyansı

İspat: $\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var} \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right)$

$$= \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n))$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\bar{X}$ 'nin Varyansı

Örnek: İki para 3 kere atılsın. Gelen turaların ortalaması $\bar{X}$ ise, ortalamaların beklenen değeri ve varyansını bulalım.

Çözüm: Bir paranın 3 kere atılmasının örnek durumu tabloda verilmiştir. Buna göre 1 para için beklenen değer $E[X_1]$;

Örnek	X= Tura sayısı	P(X = x)
YYY	0	1/8
YYT	1	1/8
YTY	1	1/8
TTY	1	1/8
YTT	2	1/8
TYT	2	1/8
TTY	2	1/8
TTT	3	1/8

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}, f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}, f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8} \quad \text{ol. üz.}$$

$$E[X] = \sum_x x f(x) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E[X_1] = E[X_2] = \frac{3}{2} \Rightarrow E[\bar{X}] = \frac{3}{2} \quad \text{olarak bulunur.}$$

$\bar{X}$ 'nin Varyansı

Çözüm: 1 para için varyans şu şekilde hesaplanır;

$X=x$	$f(x) = P(X=x)$	$x \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8

$$E[X] = 3/2 \quad E[X^2] = 3$$

$$\text{Var}(X_1) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}(X_1) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Bu durumda $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 3/4$ ise

$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)$ olmak üzere

$$= \frac{1}{4} (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2))$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

Aynı zamanda $\frac{\sigma^2}{n} = 3/8$ ' dir.

İadeli Çekim

Teorem: Sonlu sayıda elemandan oluşan bir yığının büyüklüğünü N ve bu yığından «yerine koyma» yolu ile seçilen örneklem büyüklüğü n olmak üzere; n birimlik tüm olanaklı örneklem için ortalamaların ortalaması $\mu_{\bar{X}}$ ve ortalamaların varyansı $\sigma_{\bar{X}}^2$ şu şekilde hesaplanır;

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

İadeli Çekim

Örnek: Elimizde 3, 4, 5 ten oluşan bir kitle olsun. Bu kitleden yerine koyma şartıyla 2 elemanlı örneklemeler alırsak;

➤ Kitle ortalaması $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \frac{1}{3}(3 + 4 + 5) = 4$

➤ Kitle varyansı $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{3}[(3 - 4)^2 + (4 - 4)^2 + (5 - 4)^2] = \frac{2}{3}$

➤ $n = 2$ birimlik örneklem sayısı: $N^n = 3^2 = 9$ 'dur

İadeli Çekim

Örneklem	$\bar{X}_i$	Olasılığı	x. f(x)	$x^2.f(x)$
{3,3}	3,0	1/9	0,33	1,00
{3,4}	3,5	1/9	0,39	1,36
{3,5}	4,0	1/9	0,44	1,78
{4,3}	3,5	1/9	0,39	1,36
{4,4}	4,0	1/9	0,44	1,78
{4,5}	4,5	1/9	0,50	2,25
{5,3}	4,0	1/9	0,44	1,78
{5,4}	4,5	1/9	0,50	2,25
{5,5}	5,0	1/9	0,56	2,78
Toplam	36	1	$E(\bar{X}) = 4$	$E[\bar{X}^2] = 16,33$

$\bar{X}=x$	3,0	3,5	4	4,5	5
$P(\bar{X}=x)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Olmak üzere; $E(\bar{X}) = 3 \cdot 1/9 + \dots + 5 \cdot 1/9 = 4$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 = 16,33 - 16 = 0,33$$

→ Görüldüğü üzere $E(\bar{X}) = \mu = 4$
ve $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3} = 0,33$

İadesiz Çekim

Teorem: Sonlu sayıda elemandan oluşan bir yığının büyüklüğünü N ve bu yığından «yerine koymaksızın» seçilen örneklem büyüklüğü n olmak üzere; n birimlik tüm olanaklı örneklem için ortalamaların ortalaması μ_x ve ortalamaların varyansı σ_x^2 şu şekilde hesaplanır;

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}$$

İadesiz Çekim

Örnek: 7, 10, 9, 11, 13, 12, 15 kitlesinden $n = 2$ olan rasgele örneklemeleri yerine koymaksızın seçtiğimizi düşünelim. Örneklemelerin ortalamasının beklenen değeri ve varyansı nedir?

Çözüm: 7'li kitleden 2'li seçim yapılacağı için toplamda 21 farklı örneklem alınır.

Örneklem	Ortalaması	Olasılığı	Örneklem	Ortalaması	Olasılığı	Örneklem	Ortalaması	Olasılığı
7, 10	8.5	$\frac{1}{21}$	10, 11	10.5	$\frac{1}{21}$	9,15	12	$\frac{1}{21}$
7, 9	8	$\frac{1}{21}$	10, 13	11.5	$\frac{1}{21}$	11,13	12	$\frac{1}{21}$
7, 11	9	$\frac{1}{21}$	10, 12	11	$\frac{1}{21}$	11,12	11.5	$\frac{1}{21}$
7, 13	10	$\frac{1}{21}$	10,15	12.5	$\frac{1}{21}$	11,15	13	$\frac{1}{21}$
7, 12	9.5	$\frac{1}{21}$	9,11	10	$\frac{1}{21}$	13,12	12.5	$\frac{1}{21}$
7, 15	11	$\frac{1}{21}$	9,13	11	$\frac{1}{21}$	13,15	14	$\frac{1}{21}$
10, 9	9.5	$\frac{1}{21}$	9,12	10.5	$\frac{1}{21}$	12,15	13.5	$\frac{1}{21}$

İadesiz Çekim

$\bar{X} = x$	$P(\bar{X} = x)$	$(\bar{X} - E[\bar{X}])^2$
8	$\frac{1}{21}$	$(8 - 11)^2 = 9$
8.5	$\frac{1}{21}$	$(8.5 - 11)^2 = 6.25$
9	$\frac{1}{21}$	$(9 - 11)^2 = 4$
9.5	$\frac{2}{21}$	$(9.5 - 11)^2 = 2.25$
10	$\frac{2}{21}$	$(10 - 11)^2 = 1$
10.5	$\frac{2}{21}$	$(10.5 - 11)^2 = 0.25$
11	$\frac{3}{21}$	$(11 - 11)^2 = 0$
11.5	$\frac{2}{21}$	$(11.5 - 11)^2 = 0.25$
12	$\frac{2}{21}$	$(12 - 11)^2 = 1$
12.5	$\frac{2}{21}$	$(12.5 - 11)^2 = 2.25$
13	$\frac{1}{21}$	$(13 - 11)^2 = 4$
13.5	$\frac{1}{21}$	$(13.5 - 11)^2 = 6.25$
14	$\frac{1}{21}$	$(14 - 11)^2 = 9$

Yandaki tabloya göre örneklem ortalamalarının beklenen değeri:

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= \frac{1}{21} * 8 + \frac{1}{21} * 8.5 + \frac{1}{21} * 9 + \frac{2}{21} * 9.5 + \frac{2}{21} * 10 \\ &+ \frac{2}{21} * 10.5 + \frac{3}{21} * 11 + \frac{2}{21} * 11.5 + \frac{2}{21} * 12 + \frac{2}{21} * 12.5 \\ &+ \frac{1}{21} * 13 + \frac{1}{21} * 13.5 + \frac{1}{21} * 14 = 11 \end{aligned}$$

Örneklem ortalamalarının varyansı:

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= \frac{1}{21} * 9 + \frac{1}{21} * 6.25 + \frac{1}{21} * 4 + \frac{2}{21} * 2.25 + \frac{2}{21} * 1 \\ &+ \frac{2}{21} * 0.25 + \frac{3}{21} * 0 + \frac{2}{21} * 0.25 + \frac{2}{21} * 1 + \frac{2}{21} * 2.25 \\ &+ \frac{1}{21} * 4 + \frac{1}{21} * 6.25 + \frac{1}{21} * 9 = 2.5 \end{aligned}$$

İadesiz Çekim

2. Yöntem ile çözüm:

$$E(\bar{X}) = \mu = \frac{1}{7} (7 + 10 + 9 + 11 + 13 + 12 + 15) = 11$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{7} \left((7 - 11)^2 + (10 - 11)^2 + (9 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (13 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (15 - 11)^2 \right) \\ &= 6 \quad \text{Olmak üzere}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1} = \frac{6}{2} * \frac{7 - 2}{7 - 1} = 2.5$$

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Sonuç olarak;

➤ Kitle sonsuz ise; $E(\bar{X}) = \mu$ ve $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

➤ Kitle sonlu ve iadesiz çekim var ise; $\mu_x = E(\bar{X}) = \mu$ ve $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

➤ Kitle sonlu ve iadeli çekim var ise; $\mu_x = E(\bar{X}) = \mu$ ve $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

➤ Örneklem ortalamasının standart sapması $\sigma_{\bar{x}}$ e ortalamanın standart hatası denir.

➤ $\sigma_{\bar{x}} < \sigma$

➤ n değeri büyüdükçe $\sigma_{\bar{x}}$ değeri küçülür.

➤ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ formülündeki $\frac{N-n}{N-1}$ ' e sonlu kitle çarpanı / düzeltme çarpanı denir.

N oldukça büyük bir değer ve n oldukça küçük bir değer aldığı anda, yani $\frac{n}{N} \leq 0,05$ ise,

$\frac{N-n}{N-1} \cong 1$ olacağından; $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ olarak alınır. $\frac{n}{N} > 0,05$ ise, düzeltme çarpanı kullanılır yani

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ olarak alınır.

Merkezi Limit Teoremi

Teorem: $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler $E[X_i] = \mu$ ortalamalı ve $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ varyanslı aynı olasılık dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler ise $E[\bar{X}] = \mu_{\bar{X}} = \mu$ ve $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ' dir.

Teorem: $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'ler $E[X_i] = \mu$ ortalamalı ve $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ varyanslı olan aynı olasılık dağılımına sahip olmak üzere;

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ile tanımlanan Z değişkeni, n 'nin büyük değerleri için ($n > 30$) yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir.

Merkezi Limit Teoremi

- $n \geq 30$ olduğunda; $\bar{X}$ 'nın örnekleme dağılımı, yığının dağılımına bağlı olmaksızın yaklaşık Normal Dağılıma sahiptir.
- $\bar{X}$ 'nin beklenen değeri (ortalaması), yığının ortalamasına eşittir.,

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$$

- $\left(\frac{n}{N}\right) \leq 0,05$ olduğunda $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ 'dır.

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Normal Dağılmış Bir Yığından Örneklem Seçme

Yığının ortalaması μ ve standart sapması σ_x ise,

- $\bar{X}$ 'nin beklenen değeri (ortalaması) yığın ortalamasına eşittir: $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$
- $\bar{X}$ 'nin standart sapması olan $\sigma_{\bar{X}}$; $n/N \leq 0,05$ olduğundan $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_x / \sqrt{n}$
- $\bar{X}$, örneklem dağılımının şekli ne olursa olsun normaldir.

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Örnek: Bir derste yapılan sınavların not ortalamasının 58, standart sapmasının 16 olduğu ve notların normal dağıldığı varsayılıyor. Bu sınav kağıtlarından rastgele 16'lık örneklem, rastgele 49'luk örneklem ve rastgele 600'lük örneklem seçilsin. Her üç örneklem için ortalamayı, standart hatayı ve örneklem dağılımının şeklini inceleyelim.

Çözümü: Bütün sınavların not ortalaması μ , standart sapması σ_x olmak üzere;

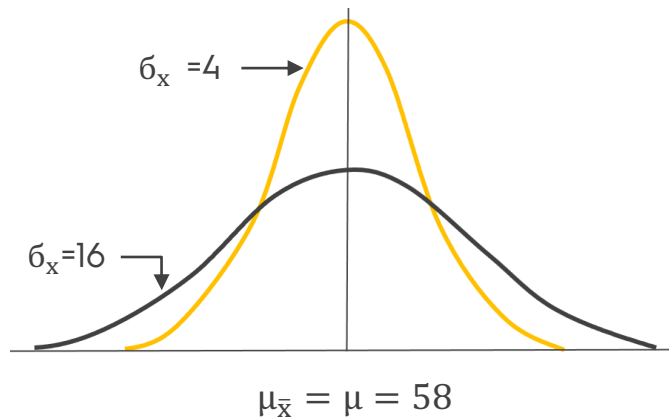
$\bar{X}$ 'nin örneklem dağılımının ortalaması $\mu_{\bar{X}}$ ve standart hatası $\sigma_{\bar{X}}$ olsun.

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

a) $n=16$ için;

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 58$$

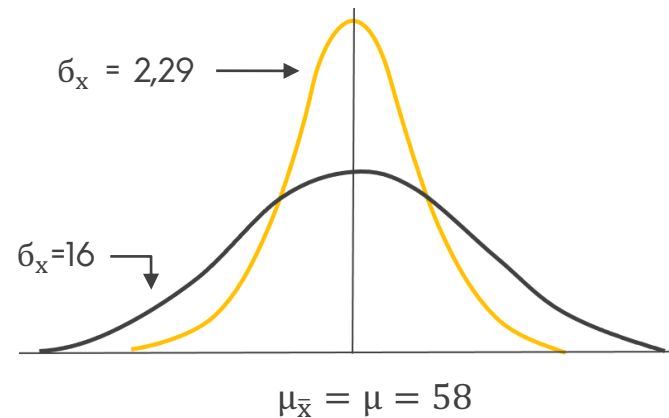
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{16}} = 4$$



b) $n=49$ için;

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 58$$

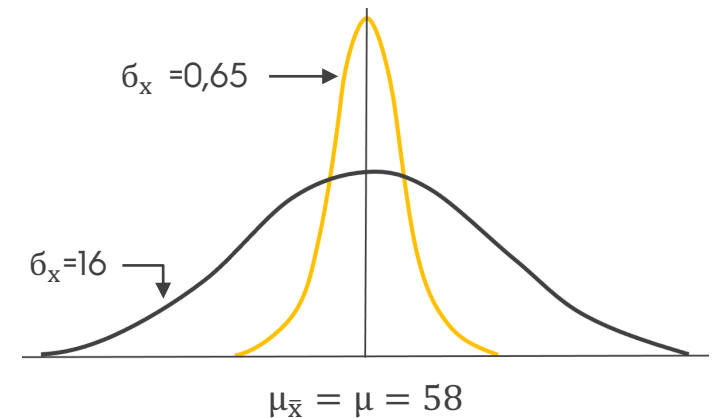
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{49}} = 2,29$$



c) $n=600$ için;

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 58$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{600}} = 0,65$$



Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Normal Dağılmamış Bir Yığından Örneklem Seçme

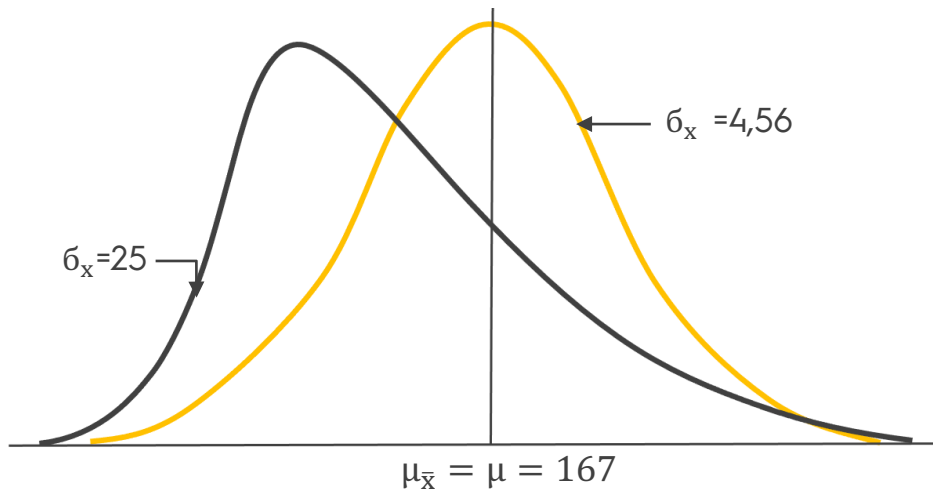
Bir çok durumda örneklem normal dağılmamış veya dağılımı bilinmeyen yığınlardan çekilir. Böyle durumlarda $\bar{X}$ 'nın örneklem dağılımının şekli Merkezi Limit Teoremine göre açıklanabilir.

Örnek: Bir sınıftaki öğrencilerin boylarının ortalamasının 167 cm ve standart sapmasının 25 cm olduğu bilinmektedir. Yığının (sınıfın) boy dağılımının sağa çarpık olduğu bilindiğine göre bu sınıftan seçilecek $n=30$ ve $n=120$ hacimli örneklemelerin ortalamasını ve standart sapmasını hesaplayalım ve örneklem dağılımlarının şeklini inceleyelim.

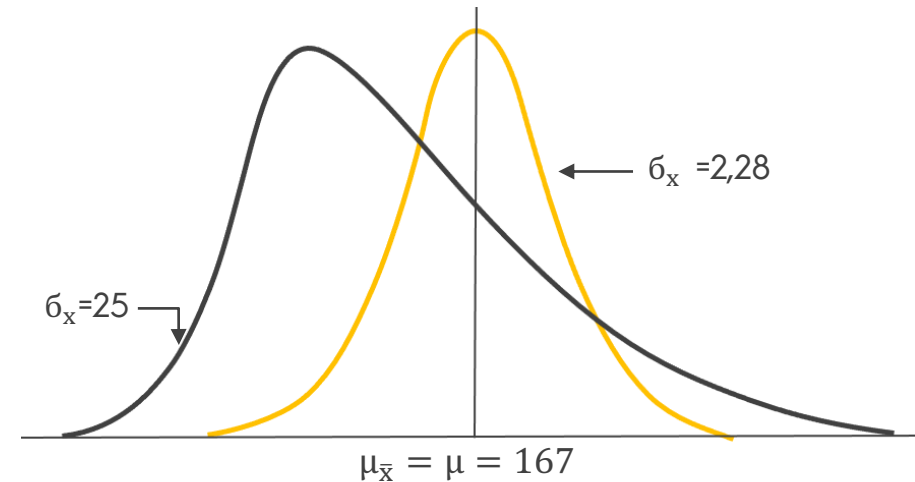
Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

- Yığın dağılımı normal olmamasına rağmen $n \geq 30$ olduğundan örneklem dağılımının normal dağılıma uyduğu varsayılır. Buna göre;

a) $n = 30$ için, $\mu_{\bar{x}} = \mu = 167$ cm
ve $\sigma_{\bar{x}} = \frac{25}{\sqrt{30}} = 4,56$ cm



b) $n = 120$ için, $\mu_{\bar{x}} = \mu = 167$ cm
ve $\sigma_{\bar{x}} = \frac{25}{\sqrt{120}} = 2,28$ cm



Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Örneklem Ortalaması İçin Olasılık Hesapları

- Normal Dağılım, birim değerlerine ait sorulara cevap vermek için kullanıldığından örnek hacmi yeterince büyük ise, MLT'ye göre aynı amaçla kullanılabilir. Bu işlem $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ dönüşümüyle yapılır.

Örnek: Bir markaya ait otomobil modellerinin ortalama fiyatı $\mu = 800.000$ TL ve standart sapması $\sigma = 90.000$ TL'dir. Rasgele seçilen 81 arabanın ortalamasının 810.000 TL ve 825.000 TL arasında bulunma olasılığı nedir?

Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı

Çözüm: $n=81 > 30$ olduğundan örneklemin normal dağılıma uyduğunu varsayacağız.

➤ Soruda bizden istenen $P(810.000 < \bar{X} < 825.000)$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ Değişkeni için } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{90000}{\sqrt{81}} = 10\,000 \text{ olmak üzere;}$$

$$z_1 = \frac{810000 - 800000}{10\,000} = 1 \quad \text{ve} \quad z_2 = \frac{825000 - 800000}{10\,000} = 2.5$$

$$\begin{aligned} P(810.000 < \bar{X} < 825.000) &= P(1 < \bar{Z} < 2.5) \\ &= P(\bar{Z} < 2.5) - P(\bar{Z} \leq 1) = 0.9938 - 0.8413 = 0.1525 \end{aligned}$$

Örneklem Varyansının Örneklem Dağılımı

- Ortalaması μ , varyansı σ^2 olan bir kitleden $X_1, X_2, \dots, X_n$ gibi n birimlik bir örneklem seçildiğinde, kitle varyansının yansız bir tahmin edicisi olan örneklem varyansı S^2 şu şekilde tanımlanır:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

- Örneklem varyansının beklenen değeri $E(S^2) = \sigma^2$ 'dir.
- Örneklem varyansının varyansı $Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{(n - 1)}$ 'dir.

Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

➤ Bazı durumlarda kitlede belirli bir özelliğe sahip olan birimlerin oranlarının bilinmesi istenebilir. Bu durumda kitleden örneklem çekilerek kitle oranı örneklemden tahmin edilir.

$$\pi = \frac{X}{N}$$

ve

$$p = \frac{x}{n}$$

N: Yığının birim sayısı

n: Örneklemdeki birim sayısı

X: Yığında belli bir özellik taşıyan birim sayısı

x: Örneklemdeki belli bir özellik taşıyan birim sayısı

π : Yığın oranı

p: Örneklem oranı

Örneklem Oranının Örneklem Dağılımı

Örnek: A şehirde yaşayan 220.000 ailenin 110.000'inin kendine ait arabası olduğu kayıtlardan tespit edilmiştir. Bu şehirden rastgele seçilen 150 ailenin 80 tanesinin kendisine ait arabasının olduğu belirlenmiştir.. Örneklemde ve yığında kendi arabası olan ailelerin oranını bulalım.

Çözüm: $N = 220.000$; $n = 150$; $X = 110.000$; $x = 80$ olmak üzere

Yığın oranı: $\pi = X/N = 110.000/220.000 = 0,5$

Örneklem oranı: $p = x/n = 80/150 = 0,533$

Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

- p örneklem oranı da $\bar{X}$ gibi bir rastgele değişken olduğundan örneklem dağılımı olarak bilinen bir olasılık dağılımına sahiptir.
- Örneklem oranının ortalaması $\mu_p = \pi$ (Burada p , π yığın oranının bir tahmin edicisi olarak bulunur.)
- İadeli çekim durumunda p 'nin standart hatası $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- İadesiz çekim durumunda p 'nin standart hatası $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ olarak hesaplanır.

Örneklem Oranının Örneklem Dağılımı

- p 'nin örneklem dağılımının şekli MLT'ye açıklanabilir. MLT'ye göre; p 'nin örneklem dağılımı, örneklemdeki birim sayısı yeterince büyük ise ($n\pi \geq 5$ ve $n(1 - \pi) \geq 5$) ise normale yakınsar.

Örnek: Deniz kenarında bir kasabada yaşayan insanların %70'inin balıkçılıkla uğraştığı bilinmektedir. Bu kasabadan rastgele seçilen 90 kişi arasından aynı oranda balıkçılıkla uğraşan olduğuna göre örneklem oranı p 'nin ortalaması ve standart sapması nedir?

Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

Çözüm: $\pi = 0,70$

$$1 - \pi = 0,30$$

$n = 90$ olmak üzere;

$$\mu_p = \pi = 0,70 \quad \text{ve} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{(0,70)(1-0,70)}{90}} = 0,048 \text{ 'dir.}$$

- $n\pi = 90(0,70) = 63 \rightarrow n\pi \geq 5'$ dir.
- $n(1 - \pi) = 90(0,30) = 27 \rightarrow n(1 - \pi) \geq 5'$ dir.

sağlandığından p 'nin örneklem dağılımının şekli yaklaşık normaldir.

Örneklem Oranı ile Olasılık Hesabı

- MLT'ye göre $n\pi \geq 5$ ve $n(1 - \pi) \geq 5$ koşullarını birlikte sağlayan örneklem büyüklüğü, yeterli örneklem büyüklüğü olarak kabul edilir. Bu koşullarda oranların örnekleme dağılımı normale yaklaşır.
- Bu amaçla p rassal değişkeni için standartlaştırılmış z değişkeni şu şekildedir:

$$z = \frac{p - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sigma_p} \quad \text{ve} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}$$

Örneklem Oranının Örnekleme Dağılımı

Örnek: Ankara'da yapılan bir araştırmada DT'larına giden izleyicilerin %64'ünün kadın olduğu belirlenmiştir. Tiyatroya giden izleyiciler arasından rastgele seçilen 80 kişinin %75'ten fazlasının kadın olma olasılığı nedir?

Çözüm: $P(p > 0,75)$ bulunmak isteniyor.

$$\mu_p = \pi = 0,64 \quad \text{ve} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0,64(1-0,64)}{80}} = 0,054 \text{ olarak bulunur.}$$

$n\pi = 80(0,64) = 51,2$ ve $n(1 - \pi) = 80(0,36) = 28,8$ olduğundan örneklem dağılımı normale yaklaştığı kabul edilir.

$$z = \frac{p - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sigma_p} = \frac{0,75 - 0,64}{0,054} = 2,037 \text{ ise}$$

$$P(p > 0,75) = P(z > 2,03) = 1 - P(z < 2,03) = 1 - 0,9788 = 0,0212$$

Sorularınız?