



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-I / Olasılık 2

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Koşullu Olasılık

Örnek: Bir fabrikanın Birinci bölümünde üretilen 60 ürünün 15'i ve İkinci bölümünde üretilen 40 ürünün 10'u bozuk olmak üzere, toplam aynı üründen 100 adet üretilmiştir. Bu fabrikanın üretilen ürünlerden rastgele biri seçildiğinde,

- a) İkinci bölümden seçilen bir ürünün bozuk olma olasılığı $= 10/40$
- b) İkinci bölümden seçilen bir ürünün sağlam olma olasılığı $= 30/40$
- c) Birinci bölümden seçilen bir ürünün bozuk olma olasılığı $= 15/60$
- d) Birinci bölümden seçilen bir ürünün sağlam olma olasılığı $= 45/60$
- e) Seçilen ürünün bozuk olması durumunda, Birinci bölümden olma olasılığı $= 15/25$

Koşullu Olasılık

- f) Seçilen ürünün bozuk olması durumunda, İkinci Bölümden olma olasılığı $= 10/25$
- g) Seçilen ürünün sağlam olması durumunda, Birinci Bölümden olma olasılığı $= 45/75$
- h) Seçilen ürünün sağlam olması durumunda, İkinci Bölümden olma olasılığı $= 30/75$
- i) Seçilen ürünün bozuk ve Birinci Bölümden olma olasılığı $= 15/100$
- j) Seçilen ürünün bozuk ve İkinci Bölümden olma olasılığı $= 10/100$
- k) Seçilen ürünün Birinci Bölümden ve bozuk olma olasılığı $= 15/100$
- l) Seçilen ürünün İkinci Bölümden ve bozuk olma olasılığı $= 10/100$

Koşullu Olasılık

Örnek: Bir makine iyi (90%), hafif kusurlu (2%) veya yüksek kusurlu (8%) parçalar üretmektedir. Üretilen bu parçalar, yüksek kusurlu olanların tespit edilip atıldığı otomatik bir kontrol makinesinden geçmektedir. Bu kontrol makinesini geçip sevkiyata gönderilen parçaların kaliteli olma oranı nedir?

- Parçaların iyi olması durumu A olmak üzere $P(A) = 0,90$
- Parçaların hafif kusurlu olması durumu B olmak üzere $P(B) = 0,02$
- Parçaların yüksek kusurlu olması durumu C olmak üzere $P(C) = 0,08$

$$P(A/C') = \frac{P(A \cap C')}{P(C')} = \frac{0,90}{0,92} = 0,978$$

Koşullu Olasılık

Örnek: Komşunuzun 2 çocuğu var. Çocuklardan birinin adının Burak olduğunu öğreniyorsunuz. Burak'ın kardeşinin erkek olma ihtimali nedir?

2 kardeş için örnek uzay $S = \{KK, KE, EK, EE\}$

1 kardeşin erkek olduğu durum $A = \{KE, EK, EE\}$

2 kardeşin de erkek olduğu durum $B = \{EE\}$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

Soru: Komşunuzun 2 çocuğu var. İçlerinden rastgele birini seçip evinize getiriyor; adı Burak. Burak'ın kardeşinin erkek kardeş olma olasılığı nedir?

Çarpma Teoremi

Teorem: $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ olayları bir deneyin S örnek uzayında ise;

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots$$

$$P(A_n/A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1})$$

Çarpma Teoremi

Örnek: 52'lik desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Bu üç kartın as olması olasılığı nedir?

A: 1. kart bir astır. ➤ $P(A) = \frac{4}{52}$ ➤ $P(A) = \frac{4}{52}$

B: 2. kart bir astır. ➤ $P(B) = \frac{3}{51}$ ➤ $P(B/A) = \frac{3}{51}$

C: 3. kart bir astır. ➤ $P(C) = \frac{2}{50}$ ➤ $P(C/A \cap B) = \frac{2}{50}$

O halde; $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) = \frac{4}{52} * \frac{3}{51} * \frac{2}{50} = \frac{24}{132600}$

Örnek Uzayın Parçalanışı

➤ $B_i \cap B_j = \emptyset$, tüm $i \neq j$ 'ler için

➤
$$\bigcup_{i=1}^k B_i = S$$

➤ $P(B_i) > 0$ tüm i 'ler için.

ise $B_1, B_2, \dots, B_k$ olayları S örnek uzayının bir parçalanışını gösterir.

Buna göre; bir E deneyi yapıldığında B_i olaylarından bir ve yalnız biri gerçekleşecektir.

Örnek Uzayın Parçalanışı

➤ Örneğin bir zarın atılması deneyinde;

$$B_1 = \{1, 2\},$$

$$B_2 = \{3, 4, 5\} \text{ ve}$$

$$B_3 = \{6\} \text{ örnek uzayın bir parçalanışıdır.}$$

Teorem: $B_1, B_2, \dots, B_k$ olayları sonlu bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k) \text{ 'dır.}$$

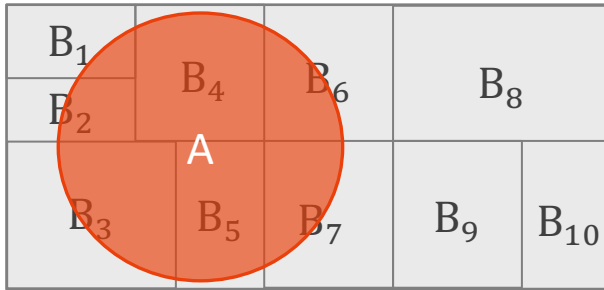
Toplam Olasılık Formülü

Teorem: $B_1, B_2, \dots, B_k$ olayları sonlu bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise S 'deki herhangi bir A olayı için A 'nın olasılığı şu şekilde hesaplanır:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) * P(A/B_i)$$

Toplam Olasılık Formülü

İspat:



$$P(A) = \underbrace{P(A \cap B_1)} + \underbrace{P(A \cap B_2)} + \cdots + \underbrace{P(A \cap B_k)}$$

Ayrık kümeler

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ P(A/B_1) \cdot P(B_1) & P(A/B_2) \cdot P(B_2) & P(A/B_k) \cdot P(B_k) & \text{Olmak üzere;} \end{array}$$

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A/B_k) \cdot P(B_k)$$

Toplam Olasılık Formülü

Örnek: Bir depoda 20 kusurlu, 80 kusursuz ampul bulunsun. Yerine koymaksızın 2 ampul seçelim. İkinci seçilen ampulün kusurlu olması olasılığını bulunuz.

- $A = \{\text{İlk seçilen ampul kusurludur}\}$
- $A' = \{\text{İlk seçilen ampul kusursuzdur}\}$
- $B = \{\text{İkinci seçilen ampul kusurludur}\}$

Bu durumda $P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')$

$$= \frac{20}{100} * \frac{19}{99} + \frac{80}{100} * \frac{20}{99} = \frac{1}{5}$$

Toplam Olasılık Formülü

Örnek: İyi, hafif kusurlu ve yüksek kusurlu parça üretimi sorusunu tekrar ele alalım. Ama şimdi müşteriye gönderilen parçalar için bir yıl garanti verildiğini kabul edelim. İyi bir parçanın ilk yıl içinde 0,01 olasılıkla arızalandığını, hafif kusurlu bir parçanın ise ilk yıl içinde 0,10 olasılıkla arızalandığını varsayalım. Bir müşterinin ilk yıl içinde arızalanan bir parçayı alması ve dolayısıyla garanti kapsamında değiştirme hakkına sahip olması olasılığı nedir?

Toplam Olasılık Formülü

- Kontrolü geçip sevkiyata giden parçalardan iyi olanların durumu $A = \frac{90}{92}$
- Kontrolü geçip sevkiyata giden parçalardan hafif kusurlu olanların durumu $B = \frac{2}{92}$
- İlk sene içinde arıza ile karşılaşma durumu E olmak üzere;

$P(E/A) = 0,01$ ve $P(E/B) = 0,10$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda E'nin olasılığı;

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) \\ &= \frac{90}{92} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{92} \cdot \frac{10}{100} = 0,012 \end{aligned}$$

Toplam Olasılık Formülü

Örnek: Pense üretim firması, üç ayrı fabrikasında aynı penseleri üretmektedir. 1 no'lu fabrikada, hem 2 hem de 3 no'lu fabrikalardaki üretimlerin iki katı kadar pense üretilmektedir. Hem 1 hem de 2 no'lu fabrikalardaki üretimin %2'si, 3 no'lu fabrikadaki üretimin %4'ü kusurlu çıkmaktadır. Üretilen penselerin tümü aynı kasaya konularak bu kasadan rastgele bir pense çekiliyor. Bu pensenin kusurlu olma olasılığı nedir?

- Ürünün 1. fabrikada üretilmesi durumu A_1 ➤ $P(A_1) = 0,5$
- Ürünün 2. fabrikada üretilmesi durumu A_2 ➤ $P(A_2) = 0,25$
- Ürünün 3. fabrikada üretilmesi durumu A_3 ➤ $P(A_3) = 0,25$
- Ürünün kusurlu olma durumu B olsun.

Toplam Olasılık Formülü

- 1. fabrikada üretilen ürünün kusurlu olması olasılığı ➤ $P(B/A_1) = 0,02$
- 2. fabrikada üretilen ürünün kusurlu olması olasılığı ➤ $P(B/A_2) = 0,02$
- 3. fabrikada üretilen ürünün kusurlu olması olasılığı ➤ $P(B/A_3) = 0,04$

Bu durumda kasadan rasgele çekilen bir pensenin kusurlu olma olasılığı;

$$P(B) = P(B/A_1)*P(A_1) + P(B/A_2)*P(A_2) + P(B/A_3)*P(A_3)$$

$$= \frac{2}{100} * \frac{1}{2} + \frac{2}{100} * \frac{1}{4} + \frac{4}{100} * \frac{1}{4}$$

$$= 0,025$$

Bağımsız Olaylar

- $P(A/B) = P(A)$ ise A ve B olayları bağımsızdır.
- Diğer bir ifadeyle, bir olayın elde edilmesi, diğer olayı etkilemiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir.

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

ifadesinde $P(A/B) = P(A)$ olduğu varsayımı ile $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ bulunur.

Tanım: A ve B olaylarının bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)' \text{ dir.}$$

Bağımsız Olaylar

Teorem: A ve B ($P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$) bağımsız olaylarsa A ve B kümelerinin en az bir ortak örnek noktası vardır. Yani $A \cap B \neq \emptyset$ 'dir.

Örnek: Bir para 2 kere atılsın, iki sefer de tura gelme olasılığı nedir?

- İlk atışta para gelmesi durumu A,
- İkinci atışta para gelme durumu B olsun. Bu durumda;

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 0,25 \text{ olur.}$$

Burada; $A = \{TT, TY\}$ ve $B = \{TT, YT\}$ olmak üzere $A \cap B = \{TT\} \neq \emptyset$

Bağımsız Olaylar

Örnek: Aynı anda iki zar atalım, zarların üst yüzündeki sayıların toplamının 11 ($x+y=11$) ve aynı anda $x \neq 5$ olması olasılığı nedir?

- $x+y=11$ koşulunu sağlayan küme $A=\{(5,6), (6,5)\}$ ➤ $P(A) = 2/36$
- $x \neq 5$ koşulunu sağlayan küme B olmak üzere ➤ $P(B) = 30/36$
- A ve B'nin aynı anda gerçekleşmesi durumunda tek ortak nokta (6,5) ol. üz.

$$P(A \cap B) = 1/36 \text{ 'dır. Bu durumda; } \underbrace{P(A) * P(B) = \frac{2}{36} * \frac{30}{36} \neq \frac{1}{36}}_{\text{Yani A ve B olayları bağımsız değil, bağımlı olaylardır.}}$$

Yani A ve B olayları bağımsız değil, bağımlı olaylardır.

Bağımsız Olaylar

Tanım: Üç ya da daha çok olay bağımsız olduğunda, bu olayların aynı anda elde edilme olasılığı, olasılıklarının çarpımına eşittir. Yani;

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

Hatırlatma: Bağımsız olaylar ayrık olaylar ile karıştırılmamalıdır.

Teorem: A ve B bir S örnek uzayında bağımsız uzaylar olsun O halde; A ve B' ; A' ve B; A' ve B' de bağımsızlardır.

Bağımsız Olaylar

Tanım: m olayın tam bağımsız (karşılıklı bağımsız) olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bir defada alınan herhangi sayıdaki olayın her bir kombinasyonunun bağımsız olmasıdır. m=3 alındığında A_1, A_2, A_3 ün tam bağımsızlığı için;

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2) * P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) * P(A_3)$$

denklemleri aynı anda sağlanmalıdır.

➤ $P(A_1 \cap A'_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A'_2) * P(A_3)$ gibi çıkarımlar yapabiliriz.

Bağımsız Olaylar

Örnek: 2 parayı attığımızı düşünelim. $A = \{\text{ilk paranın tura gelmesi}\}$, $B = \{\text{İkinci paranın tura gelmesi}\}$ ve $C = \{\text{her ikisinin de tura veya yazı gelmesi}\}$ olayı olmak üzere, bu olaylar bağımsız mıdır?

- $A = \{TT, TY\}$ ➤ $P(A) = 1/2$
- $B = \{YT, TT\}$ ➤ $P(B) = 1/2$
- $C = \{TT, YY\}$ ➤ $P(C) = 1/2$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \{TT\} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) * P(B) * P(C) \quad \text{Yani bu 3 olay tam bağımsız değildir.}$$

Bağımsız Olaylar

Örnek: A ve B ayrık iki olay ve $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ ise A ve B'nin bağımlı olaylar olduğunu gösteriniz.

- A ve B ayrık olaylar ise; $P(A \cap B) = 0$ 'dır.
- $P(A) > 0$ ve $P(B) > 0$ olduğu bilindiğine göre; $P(A) \cdot P(B) > 0$ 'dır.
- Bu durumda; $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ olur.


Yani A ve B olayları bağımsız değil, bağımlı olaylardır.

Bağımsız Olaylar

Örnek: İki zar atalım, $S=\{(x,y) \mid x=1, 2, \dots, 6; y=1, 2, \dots, 6\}$ tüm sıralı çiftlerin örnek uzayı olsun. $A=\{\text{ilk zar}=1, 2 \text{ veya } 3\}$; $B=\{\text{ilk zar}=3, 4 \text{ veya } 5\}$ ve $C=\{\text{iki zarın üst yüzündeki sayıların toplamı}=9\}$ olduğuna göre, bu olaylar bağımsız mıdır?

$$P(A) = 18/36 \quad ; \quad P(B) = 18/36 \quad ; \quad P(C) = 4/36$$

$$A \cap B = \{(3,1), (3,2), \dots (3,6)\} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 6/36$$

$$A \cap C = \{(3,6)\} \quad \rightarrow \quad P(A \cap C) = 1/36$$

$$B \cap C = \{(3,6), (4,5), (5,4)\} \quad \rightarrow \quad P(B \cap C) = 3/36$$

$$A \cap B \cap C = \{(3,6)\} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B \cap C) = 1/36$$

Bağımsız Olaylar

$$P(A \cap B) ? P(A) * P(B) \quad \rightarrow \quad \frac{6}{36} \neq \frac{18}{36} * \frac{18}{36} \quad (\text{Bağımlı olay})$$

$$P(A \cap C) ? P(A) * P(C) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{36} \neq \frac{18}{36} * \frac{4}{36} \quad (\text{Bağımlı olay})$$

$$P(B \cap C) ? P(B) * P(C) \quad \rightarrow \quad \frac{3}{36} \neq \frac{18}{36} * \frac{4}{36} \quad (\text{Bağımlı olay})$$

$$P(A \cap B \cap C) ? P(A) * P(B) * P(C) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{36} = \frac{18}{36} * \frac{18}{36} * \frac{4}{36} \quad (\text{Bağımsız olay})$$

Bayes Teoremi

- Bayes Teoremi, bir olayın gerçekleşme olasılığının, bu olayın önceden bilinen bazı koşullar altında nasıl değiştiğini incelemek için kullanılır.
- Bayes teoremi, stokastik (belirsiz) süreçler sırasında ortaya çıkan bir rastgele A olayı ile bir diğer rastgele B olayı için bu olayların koşullu olasılıkları ve marjinal olasılıkları arasındaki ilişkiyi ifade eder;

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) * P(A)}{P(B)}$$

Bayes Teoremi

Örnek: 2 torbadan birincisinde 4 siyah ve 6 kırmızı top, ikincisinde 3 siyah 2 kırmızı top vardır. Rasgele bir torba seçer ve bu torbadan rasgele bir top çekersek;

- a) Çekilen topun siyah bir top olma olasılığı nedir?
- b) Çekilen topun siyah olduğu bilindiğinde birinci torbanın seçilmiş olma olasılığı nedir?

➤ İlk olarak olayları tanımlayalım;

A_1 : Birinci torbanın seçilmesi

A_2 : İkinci torbanın seçilmesi

B : Siyah topun seçilmesi

Bayes Teoremi

$$a) P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

$$P(B) = P(A_1) * P(B / A_1) + P(A_2) * P(B / A_2)$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{4}{10} + \frac{1}{2} * \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

$$b) P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{4/20}{1/2} = \frac{4}{10}$$

Bu örneğin genelleştirilmiş hali Bayes Teoremi olarak bilinir.

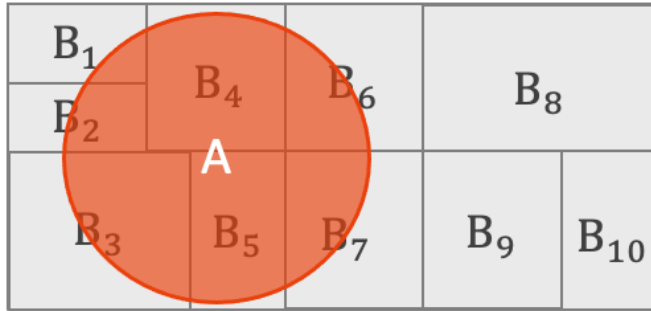
Bayes Teoremi

Teorem: $B_1, B_2, \dots, B_k$ 'lar bir S örnek uzayının bir parçalanışı olsun. A , S içinde $P(A) \neq 0$ olan bir olay ise;

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

Bayes Teoremi

İspat:



➤ $S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$

➤ $B_i \cap B_j = \emptyset$ olduğuna göre ($i, j=1, 2, \dots, k$);

➤ $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)$

➤ $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_k \cap A)$

Buradan koşullu olasılık tanımına uyarsak;

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r) \cdot P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

Bayes Teoremi

Örnek: Cıvata üretimi yapan bir fabrikada toplam üretimin %30'u A, %30'u B ve geri kalanını da C makinalarında üretilmektedir. Bu makinaların sırasıyla üretimlerinin $1/100$, $3/100$ ve $2/100$ 'ü kusurlu cıvatalardır. Bir günlük üretim sonunda rastgele bir cıvata seçiliyor ve kusurlu olduğu tespit ediliyor. Bu kusurlu cıvatanın A makinası, B makinası ve C makinasında üretilmiş olma olasılığı nedir?

- Üretilen cıvatanın kusurlu olması durumu: E
- Cıvatanın A makinesinde üretilmesi durumu: A
- Cıvatanın B makinesinde üretilmesi durumu: B
- Cıvatanın C makinesinde üretilmesi durumu: C

Bayes Teoremi

- $P(A) = 0,3$ ➤ $P(E / A) = 0,01$
- $P(B) = 0,3$ ➤ $P(E / B) = 0,03$
- $P(C) = 0,4$ ➤ $P(E / C) = 0,02$

$$P(A \cap E) = P(A) * P(E / A) = 0,003$$

$$P(B \cap E) = P(B) * P(E / B) = 0,009$$

$$P(C \cap E) = P(C) * P(E / C) = 0,008$$

Bayes Teoremi

$$P(A / E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)} = \frac{0,003}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{3}{20}$$

$$P(B / E) = \frac{P(B \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)} = \frac{0,009}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{9}{20}$$

$$P(C / E) = \frac{P(C \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)} = \frac{0,008}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{8}{20}$$

Olayların Olasılıkları

Basit olayların
olasılıkları

$$P(A), P(B)$$

Bileşik olayların
olasılıkları

$$P(A \cap B)$$

Bir arada oluşamayan
(Ayrık) olayların
olasılıkları

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bir arada oluşabilen
olayların olasılıkları

$$A \cap B \neq \emptyset \rightarrow P(A \cap B) \neq 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bağımlı (Koşullu)
olayların olasılıkları

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Bağımsız olayların
olasılıkları

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Çözümlü Alıştırmalar

Örnek: Üniversitemizin Proje Üretim Merkezinde (PÜM) çalışan 20 kişiden 15'i inşaat mühendisi, 5'i mimardır. Mühendislerin 9'u ve mimarların 3'ü erkektir. PÜM'den rastgele seçilen bir personelin; **a)** Mühendis ve kadın olma olasılığını, **b)** Mühendis veya kadın olma olasılığını bulalım.

- M: Seçilen personel mühendistir
- K: Seçilen personelin kadındır olmak üzere;

a) $P(M \cap K) = 6/20 = 0,30$

b) $P(M \cup K) = P(M) + P(K) - P(M \cap K) = (15/20) + (8/20) - (6/20)$
 $= (17/20) = 0,85$

Çözümlü Alıştırmalar

Örnek: Bir kişi her gün evden işe yürüyerek gitmektedir. Bu kişinin yağmur yağmayan bir günde işe geç gitme olasılığı $1/5$, yağmurlu bir günde işe geç gitme olasılığı ise $2/3$ 'tür. Herhangi bir günde yağmur yağma olasılığı $1/4$ 'tür. Buna göre bu kişinin işe geç kaldığı bir günde yağmur yağmış olma olasılığı kaçtır?

- Havanın yağmurlu olma durumu: A
- İşçinin işe geç kalma durumu: B olmak üzere;

$$\left. \begin{array}{l} \text{➤ } P(A) = 0,25 \\ \text{➤ } P(B / A) = 0,66 \\ \text{➤ } P(B / A') = 0,2 \end{array} \right\} P(A / B) = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B/A).P(A)+P(B/A').P(A')} = \frac{0,66 * 0,25}{0,66 * 0,25 + 0,2 * 0,75} = 0,52$$

Çözümlü Alıştırmalar

Örnek: Bir ceza soruşturmasının belirli bir aşamasında, görevli müfettiş belirli bir şüphelinin suçluluğuna %60 oranında ikna olmuştur. Diyelim ki, yeni bir kanıt parçası katilin belirli bir özelliğini (solak, kel v.b.) ortaya çıkarmıştır. Nüfusun %20'si bu özelliğe sahipse, şüphelinin bu özelliğe sahip olduğu ortaya çıktığında müfettiş şüphelinin suçluluğundan ne kadar emin olacaktır?

Çözümlü Alıştırmalar

Çözüm: Şüphelinin suçlu olması durumu A

Şüphelinin yeni kanıtta bulunan özelliklere sahip olması durumu B ise

$$P(A / B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/A') \cdot P(A')}$$
$$= \frac{1 * 0,6}{1 * 0,6 + 0,2 * 0,4} = \frac{0,6}{0,68} = 0,882$$

Soru: Soruda yeni bulunan delilin farklı olası yorumlara olanak verdiğini düşünelim. Katilin bu özellikleri %90 ihtimalle taşıdığı varsayımı altında, elimizdeki şüphelinin suçlu olma olasılığı nedir?

Çözümlü Alıştırmalar

Örnek: Bir şirket yönetici kadrosuna kendi çalışanlarından birini atayacaktır. Ahmet bu kadroya başvurduğu takdirde işi elde etme şansını merak etmektedir. Ahmet, iş arkadaşı Esra bu kadroya başvurmazsa işi elde etme şansının %75 olduğunu, Esra başvuru yaparsa bu şansın $1/3$ 'e düşeceğini düşünmektedir. Esra'nın bu kadroya başvurma olasılığı $2/5$ ise Ahmet'in yönetici kadrosuna atanma olasılığı nedir?

Çözümlü Alıştırmalar

Çözüm: Ahmet'in kadroya atanması A,
Esra'nın kadroya başvurması B olsun.

➤ $P(A / B) = 1/3$

➤ $P(A / B') = 3/4$

➤ $P(B) = 2/5$

➤ $P(B') = 3/5$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$= P(A/B) * P(B) + P(A/B') * P(B')$$

$$= \frac{1}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{4} * \frac{3}{5} = \frac{35}{60}$$