



T.C.
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



Mühendislik İstatistiği-II / Hipotez Testleri

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

Hipotez Testleri

- Hipotez, karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir.
- İstatistiksel hipotez, herhangi bir anakütle parametresiyle ilişkili olarak ileri sürülen ve doğruluğu olasılık kurallarla araştırılabilen önermedir.
- İstatistikte hipotez testleri, örneklem verilerine dayanarak bir veya daha fazla popülasyon hakkındaki varsayımları test etmek için kullanılan istatistiksel yöntemlerdir. Bu testler, popülasyonun parametreleri hakkında yapılan varsayımların doğruluğunu test etmek için kullanılır.
 - ↳ Belirli bir markaya ait akülerin ortalama ömrünün 2.5 saat olduğunu ileri sürdüğümüzde bir hipotez önermiş oluruz. Bunun anlamı normal olan bir dağılımın aritmetik ortalaması 2.5 saate eşittir demektir.

Hipotez Testinin Aşamaları

- Hipotezlerin oluşturulması
- Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi
- Örneklem dağılımının belirlenmesi
- Ret bölgesinin / kritik değerin belirlenmesi
- Test istatistiğinin hesaplanması ve yorumlanması

H_0 ve H_1 Hipotezlerinin Oluşturulması

- **H_0 Hipotezi:** Test edilecek iddia veya beyanı ifade eder. Sıfır hipotezi, boş(null) hipotez, istatistiksel hipotez şeklinde isimlendirilebilir.
 - Mevcut duruma atıf verir. Kitle parametresinin bir değere eşit olduğunu söyler.
 - Reddedilebilir veya reddedilemez.
 - " $=$ " ; " $\leq$ " veya " $\geq$ " işaretlerini içerir.
- **H_1 Hipotezi:** H_0 Hipotezine karşı test edilen karşıt hipotezi ifade eder. Araştırma hipotezi, alternatif hipotez şeklinde de isimlendirilebilir.
 - Sıfır hipotezinin tersi olup mevcut durumu sorgular.
 - " $\neq$ " ; " $<$ " veya " $>$ " işaretlerini içerir.

H_0 ve H_1 Hipotezlerinin Oluşturulması

Hipotez kurulurken ana kitle parametrelerinden μ, σ, σ^2 ya da π kullanılır.

➤ Yeni doğan bebeklerin ortalama ağırlığı en az 2,5 kg'dır.

İddia: $\mu \geq 2,5$

İddianın tersi: $\mu < 2,5$

$H_0: \mu = 2,5$

$H_1: \mu < 2,5$

➤ CEO'ların yarısından fazlası erkektir.

İddia: $\pi > 0,5$

İddianın tersi: $\pi \leq 0,5$

$H_1: \pi > 0,5$

$H_0: \pi = 0,5$

➤ Üniversite öğrencilerinin yaş ortalaması en fazla 22'dir.

İddia: $\mu \leq 22$

İddianın tersi: $\mu > 22$

$H_0: \mu = 22$

$H_1: \mu > 22$

H_0 ve H_1 Hipotezlerinin Oluşturulması

- Bu sınıftaki öğrencilerin 1. ödevden aldıkları notların ortalaması 60'tan farklıdır.

İddia: $\mu \neq 60$

İddianın tersi: $\mu = 60$

$H_1: \mu \neq 60$

$H_0: \mu = 60$

} Çift yönlü hipotez

- Bu sınıftaki öğrencilerin 1. ödevden aldıkları notların ortalaması 60'tan azdır.

İddia: $\mu < 60$

İddianın tersi: $\mu \geq 60$

$H_1: \mu < 60$

$H_0: \mu = 60$

} Tek yönlü hipotez

- Bu sınıftaki öğrencilerin 1. ödevden aldıkları notların ortalaması 60'tan fazladır.

İddia: $\mu > 60$

İddianın tersi: $\mu \leq 60$

$H_1: \mu > 60$

$H_0: \mu = 60$

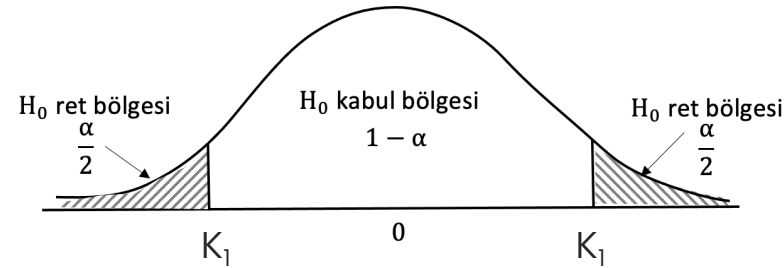
} Tek yönlü hipotez

H_0 ve H_1 Hipotezlerinin Oluşturulması

➤ Çift Yönlü Hipotezler

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



➤ Tek Yönlü Hipotezler

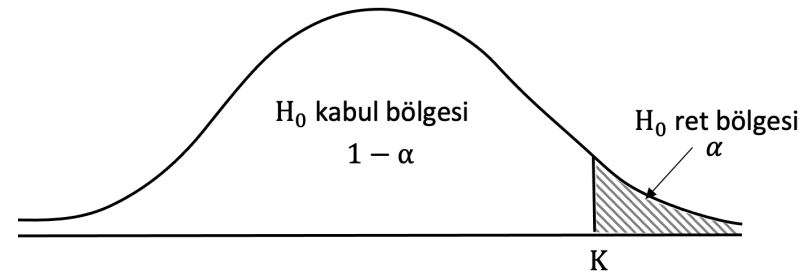
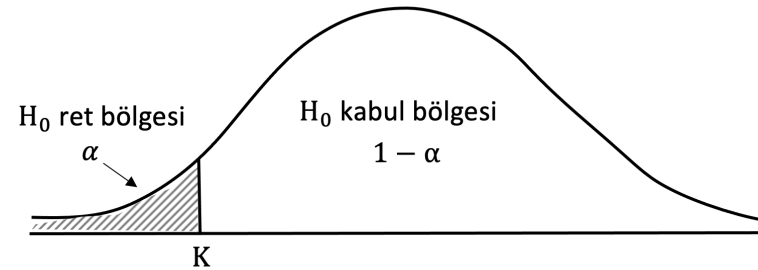
$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

veya

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$



Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

- $1 - \alpha$ güven düzeyini ve α anlamlılık düzeyini ifade etmektedir.
- α anlamlılık düzeyi, hipotez testinin kalitesini göstermektedir.
 - $\alpha = 0,01$ için kontrol edilen hipotez testi doğru ise, %99 güvenle/ihtimalle hipotez doğrudur demektir. Bu nedenle α 'nın büyütülmesi aslında hipotezin kalitesini düşürür. Çalışmalarda α genelde %1 ya da %5 olarak dikkate alınmaktadır.
- α değeri, kritik bölgeyi / ret bölgesini hesaplama açısından önemlidir.

I. Tip ve II. Tip Hata

Bir hipotez testi sonucunda örneklem istatistiklerine göre şu dört durumdan birisi gerçekleşmiş olur:

- H_0 gerçekte doğrudur ve reddedilmemiştir $(1 - \alpha)$ → Testin güvenilirlik düzeyi
- H_0 gerçekte doğrudur fakat reddedilmiştir (α) → I. tip hata
- H_0 gerçekte yanlıştır fakat reddedilmemiştir (β) → II. tip hata
- H_0 gerçekte yanlıştır ve reddedilmiştir $(1 - \beta)$ → Testin gücü

I. Tip ve II. Tip Hata

		Gerçek Durum	
		H ₀ Doğru	H ₀ Yanlış
Test Sonucu	H ₀ Kabul	Güven Düzeyi (1 - α)	II. Tip Hata (β)
	H ₀ Ret	I. Tip Hata (α)	Testin Gücü (1 - β)

- $1 - \alpha = P(H_0 \text{ kabul} / H_0 \text{ doğru})$
- $\alpha = P(H_0 \text{ ret} / H_0 \text{ doğru}) = P(\text{I. tip hata})$
- $\beta = P(H_0 \text{ kabul} / H_0 \text{ yanlış}) = P(\text{II. tip hata})$
- $1 - \beta = P(H_0 \text{ ret} / H_0 \text{ yanlış})$

Örnekleme Dağılımının Belirlenmesi

Tek Popülasyon İçin

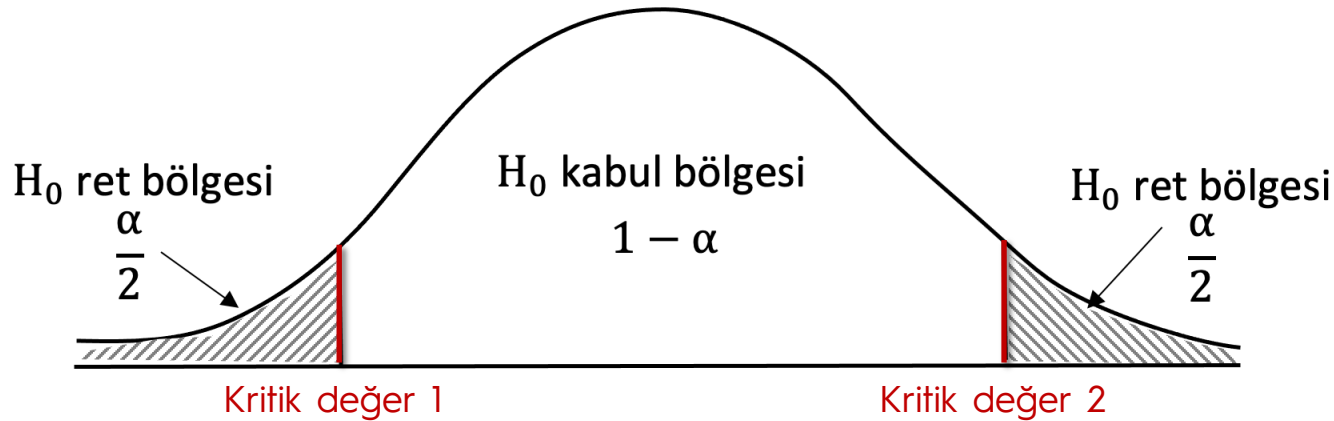
- Ortalama için hipotez testi (μ)
 - Kitle varyansı biliniyorsa - Z tablosu
 - Kitle varyansı bilinmiyorsa
 - $n > 30$ ise - Z tablosu
 - $n < 30$ ise - t tablosu
- Varyans için hipotez testi (σ^2) - χ^2 tablosu
- Oran için hipotez testi (π) - Z tablosu

İki Popülasyon İçin

- Ortalamaların farkı için hipotez testi ($\mu_1 - \mu_2$)
 - Kitle varyansları biliniyorsa - Z tablosu
 - Kitle varyansları bilinmiyorsa
 - Varyanslar eşit kabul edilirse - t tablosu
 - Varyanslar eşit kabul edilmezse - t tablosu
- Varyansların oranı için hipotez testi (σ^2_1/σ^2_2) - F tablosu
- Oranların farkı için hipotez testi ($\pi_1 - \pi_2$) - Z tablosu

Kritik Değerin Belirlenmesi

- H_0 hipotezinin reddedildiği bölgeye kritik bölge/ret bölgesi denir. α anlamlılık düzeyinden elde edilir.
- Kritik değer, hipotez testinde ret bölgesini kabul bölgesinden ayıran değere denir.



Kritik değer;
• z tablosu
• t tablosu
• χ^2 tablosu
• F tablosu
Kullanılarak bulunur.

Test İstatistiğinin Belirlenmesi

- H_0 hipotezinin reddedilip reddedilemeyeceğini gösteren sayısal değerlere test istatistiği denir.
- Z, t, x^2 ve F gibi test istatistiklerinin değerleri ile hipotezler hakkında karar verilir.

$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} \quad x^2_{\text{test}} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2} \quad F_{\text{test}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

1. Durum: Kitle varyansı σ^2 biliniyor:

- H_0 ve H_1 hipotezleri kurulup α önem düzeyi belirlendikten sonra örnekleme dağılımına karar verilir. Bu durumda örneklem normal dağılımdan geliyor ve kitle varyansı σ^2 biliniyorsa Z dağılımı test istatistiği olarak kullanılır. Ret bölgesinin hesaplanması için;

$$\left. \begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array} \right\} \text{ret bölgesi } \mu_0 \notin \left[\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
$$\left. \begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array} \right\} \text{ret bölgesi } \mu_0 > \bar{X} + Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\left. \begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{array} \right\} \text{ret bölgesi } \mu_0 < \bar{X} - Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{l} \longrightarrow Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2} \text{ ya da } Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2} \\ \longrightarrow Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha} \\ \longrightarrow Z_{\text{test}} > Z_{\alpha} \end{array}$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

➤ $H_0: \mu = \mu_0$ ve $H_1: \mu \neq \mu_0$ için ret bölgesinin belirlenmesi:

$$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2} \text{ ya da } Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{\alpha/2} \text{ ya da } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu_0 \text{ ya da } \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0$$

$$\mu_0 \notin \left[\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Kitle varyansı σ^2
 Biliniyorken Kitle
 Ortalaması μ için
 Hipotezler ve
 Karar Kuralları

Hipotez	Karşıt Hipotez	Test İstatistiği	Ret Bölgesi
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha}$
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2}$ $Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha}$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Örnek: Bir malzeme üretiminde ürün çapının 12 mm olması istenmektedir. Üretimden alınan 90 örnekte çaplar ölçülmüş ve $\bar{X}=12,075$ mm hesaplanmıştır. Geçmiş tecrübeye dayanarak $\sigma^2 = 0,069 \text{ mm}^2$ olarak bilindiğine göre üretimin doğru şekilde yapıldığı ve %95 güvenle bu şekilde devam edebileceği söylenebilir mi? Çap değerlerinin ND'ye uyduğu varsayılmaktadır.

➤ $\mu_0=12$ mm, $\sigma^2=0,069 \text{ mm}^2$, $n=90$ adet, $\bar{X}=12,075$ mm, $\alpha =0,05$ olmak üzere;

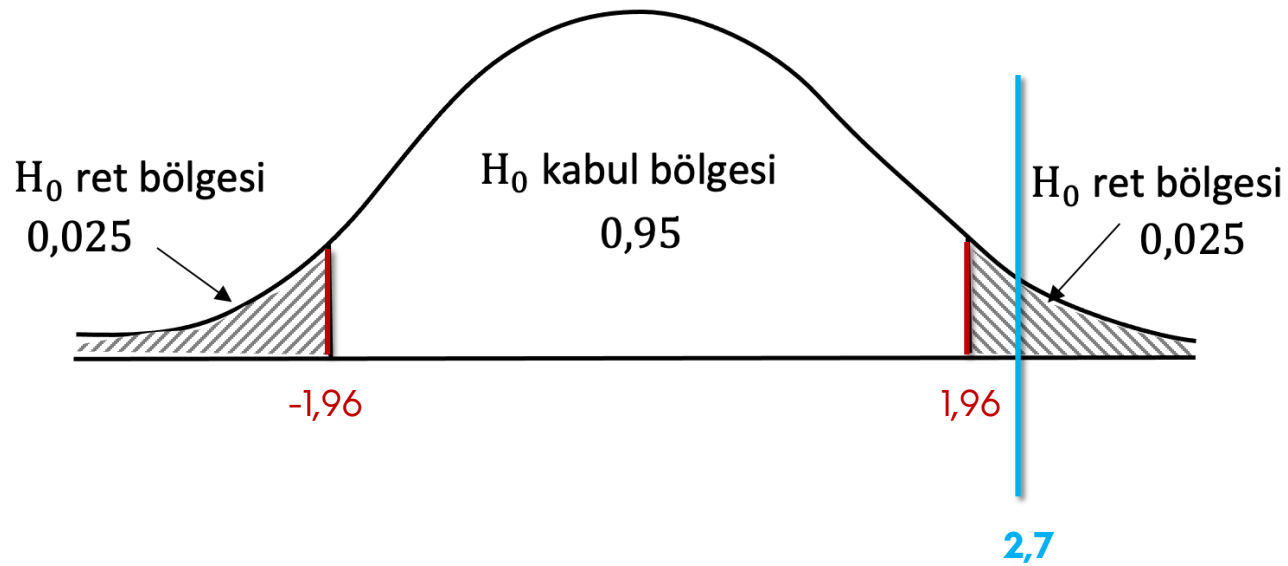
$$H_0: \mu = 12$$

$$H_1: \mu \neq 12$$

➤ Çift yönlü hipotez olduğu için $Z_{\alpha/2}$ değerini Z tablosundan buluruz.

$$\pm Z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ olduğuna göre}$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi



$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{12,075 - 12}{\frac{0,26}{\sqrt{90}}} = 2,7$$

$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2}$ olduğu için;

- H₀ reddedilir
- H₁ kabul edilir.

Yani üretilen malzeme çapı istenilen ölçülerde değildir.

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Örnek: Spor malzemeleri üreten bir firma, ürettiği olta iplerinin dayanma mukavemeti ortalamasının 15 kg/mm², standart sapmasının 0.5 kg/mm² olan normal dağılıma uyduğunu açıklamıştır. Firmanın bu iddiasını test etmek isteyen bir tüketici örgütü, firmanın üretiminden rastgele 50 olta ipi almış ve ortalamasını 14.8 kg/mm² olarak belirlemiştir. %1 hata seviyesinde olta ipleri mukavemetinin 15 kg/mm² ye eşit olup olmadığını test edelim.

➤ $\mu_0 = 15$ kg/mm², $\sigma = 0.5$ kg/mm², $n=50$ adet, $\bar{X} = 14.8$ kg/mm², $\alpha = 0,01$ olmak üzere

$$H_0: \mu = 15$$

$$H_1: \mu \neq 15$$

➤ Çift yönlü hipotez olduğu için $Z_{\alpha/2}$ değerini Z tablosundan buluruz.

$$\pm Z_{\alpha/2} = 2,57 \text{ olduğuna göre}$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi



$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{14,8 - 15}{\frac{0,5}{\sqrt{50}}} = -2,8$$

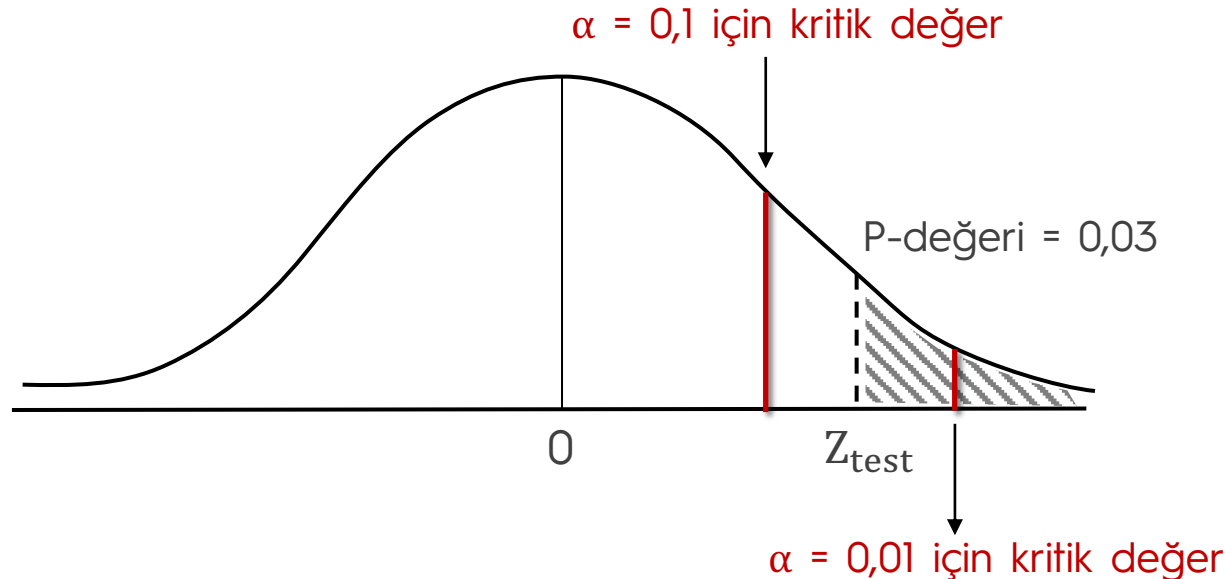
$Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2}$ olduğu için;

- H₀ reddedilir
- H₁ kabul edilir.

Yani olta ipleri mukavemeti ortalamasının 15 kg/mm² 'den farklı olduğu söylenebilir.

Hipotez Testine P-Değeri Yaklaşımı

- Hipotez testlerinde diğer bir yol P-değerine göre karar vermektir.
- Bir hipotez testinin P-değeri, H_0 hipotezinin reddedildiği en küçük önem düzeyine eşit olan olasılık ölçümüdür. P-değeri, bir hipotez testinin gözlenen önem düzeyi olarak açıklanabilir.



Tek yönlü P-değeri:

P-değer $\geq \alpha$ ise H_0 Kabul

P-değer $< \alpha$ ise H_0 Ret

H_1 Kabul

Hipotez Testine P Değeri Yaklaşımı

- İki yönlü P-değeri: İki yönlü test yapıldığında sıfır hipotezini ret bölgesi dağılım eğrisinin her iki yönünde olacaktır. Bu durumda, Z_{test} değerinin düşebileceği yönde tek yönlü P-değeri bulunup $\alpha/2$ ile kıyaslanır.
- Yani $(P\text{-değer}) < \alpha/2$ ise H_0 Reddedilir; $(P\text{-değer}) \geq \alpha/2$ ise H_0 Kabul edilir.
- μ ile ilgili farklı tipteki testler için P-değerleri şu şekilde bulunur:

$$P - \text{değer} = \begin{cases} P(Z < Z_{\text{test}}), H_1: \mu < \mu_0 \text{ ise} \\ P(Z > Z_{\text{test}}), H_1: \mu > \mu_0 \text{ ise} \\ P(Z < Z_{\text{test}}), H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ ve } Z_{\text{test}} < 0 \text{ ise} \\ P(Z > Z_{\text{test}}), H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ ve } Z_{\text{test}} > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Hipotez Testine P Değeri Yaklaşımı

Örnek: Bir sanat evinin araştırma birimi bir sergideki sanat eserlerinin satış değeri hakkında sergiyi ziyaret eden ve uzman olmayan kişilerin yeteneğini ölçmek istemektedir. Vazonun gerçek satış değeri olan $\mu_0 = 550$ milyon liranın, uzman olmayan kişilerin verdiği ortalama değer (μ)'den farklı olup olmadığı test edilecektir. Bu değerler farklı olursa, uzman olmayanlar vazonun satış değerinin yanlış değerlendiricileri olacaktır.

Bu amaçla $n=100$ birimlik rastgele örneklem seçilerek 13. asırdan kalma bir vazonun satış değeri sorulmuştur ve örneklem ortalaması 733 milyon lira olarak bulunmuştur. Vazo fiyatının standart sapmasının 787 milyon lira olduğu bilindiğine göre %95 güvenle bu örneklem sonucu kararımız ne olacaktır?

Hipotez Testine P Değeri Yaklaşımı

1. Yaklaşım ile Çözüm: $H_0: \mu = 550$

$H_1: \mu \neq 550$ olarak hipotezler kurulur.

- $\alpha = 0,05$ olacaktır. Çift yönlü hipotez olduğu için $\pm Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = \pm 1,96$ bulunur.
- Z test istatistiği değeri;

$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{733 - 550}{\frac{787}{\sqrt{100}}} = 2,33$$

➡ $Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2}$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir.

Hipotez Testine P Değeri Yaklaşımı

2. Yaklaşım ile Çözüm: $H_0: \mu = 550$

$H_1: \mu \neq 550$ olarak hipotezler kurulur.

- P-değerini hesaplamak için önce $Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{733 - 550}{\frac{787}{\sqrt{100}}} = 2,33$ olarak hesaplanır.
- $Z_{\text{test}} > 0$ olduğu için P-değer, $P(Z > Z_{\text{test}}) = P(Z > 2,33) = 1 - P(Z < 2,33) = 0,0099$
- İki yönlü test olduğu için;
 (P-değer) $< \alpha/2$ yani $0,0099 < 0,025$ olduğu için H_0 Reddedilir

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

2. Durum: Kitle varyansı σ^2 bilinmiyor:

- Kitle varyansı σ^2 'nin bilinmediği durumda n yeterince büyük ise ($n > 30$) ve ana kitlenin normal dağılıma uyduğu biliniyorsa Z_{test} istatistiği kullanılır. Sadece burada σ yerine, bunun yansız tahmin edicisi olarak örneklem standart sapması s kullanılır.

$$Z_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- $n < 30$ olan durumda ise z 'yi test istatistiği olarak daha fazla kullanamayız. Bunun yerine $n-1$ serbestlik dereceli student-t-yoğunluğuna sahip t_{test} kullanılır:

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Kitle varyansı σ^2
Bilinmiyorken ve
 $n < 30$ iken Kitle
Ortalaması μ için
Hipotezler ve
Karar Kuralları

Hipotez	Karşıt Hipotez	Test İstatistiği	Ret Bölgesi
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$t_{\text{test}} < -t_{\alpha, n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$t_{\text{test}} > t_{\alpha, n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$		$t_{\text{test}} > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{\text{test}} < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		$t_{\text{test}} < -t_{\alpha, n-1}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		$t_{\text{test}} > t_{\alpha, n-1}$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Örnek: Bir iş yerinde belirli bir işi bitirmek için gereken ortalama zamanın 12,5dk olduğu bilinmektedir. 10 yeni işçiye bu iş yaptırılmış ve deneme sonunda aşağıdaki süreler tutulmuştur.

9,3	12,1	15,7	10,3	12,2	14,8	15,1	13,2	15,9	14,5
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Kitle dağılımının normal dağıldığı varsayılmaktadır. $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde bu örneklemin alındığı kitle için işi bitirme süresinin ortalamadan farklı olup olmadığını test edelim.

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Çözüm: İlk olarak hipotezimizi kuralım: $H_0: \mu = 12,5$

$$H_1: \mu \neq 12,5$$

➤ $n = 10$ olduğuna göre, serbestlik derecesi $n-1 = 9$ 'dur. Çift yönlü hipotez olduğu için

$$\pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,025; 9} = \pm 2,262 \text{ olarak bulunur.}$$

➤ Örneklem ortalaması $\bar{X} = 13,31$ ve standart sapması $S = 2,28$ olarak hesaplanır.

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{13,31 - 12,5}{\frac{2,28}{\sqrt{10}}} = 1,13$$

➡ $t_{\text{test}} < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ yani $1,13 < 2,262$ olduğuna göre H_0 'ı reddedemeyiz.

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Örnek: Bir telefon endüstrisi yöneticisi müşterilerinin normalde aylık 52 dolar olan faturalarının son zamanlarda yükseldiğini düşünmektedir. Bunu test etmek amacıyla son aylarda gelen faturalardan rastgele 25 tanesini incelediğinde bu faturaların ortalamasının 53,1 dolar ve standart sapmasının 10 dolar olduğunu görmüştür. Yöneticinin iddiasını $\alpha = 0,10$ önem düzeyinde test edelim. Kitle dağılımının ND'ye uyduğu bilinmektedir.

Çözüm:

İlk olarak hipotezimizi kuralım: $H_0: \mu = 52$ dolar

$H_1: \mu > 52$ dolar

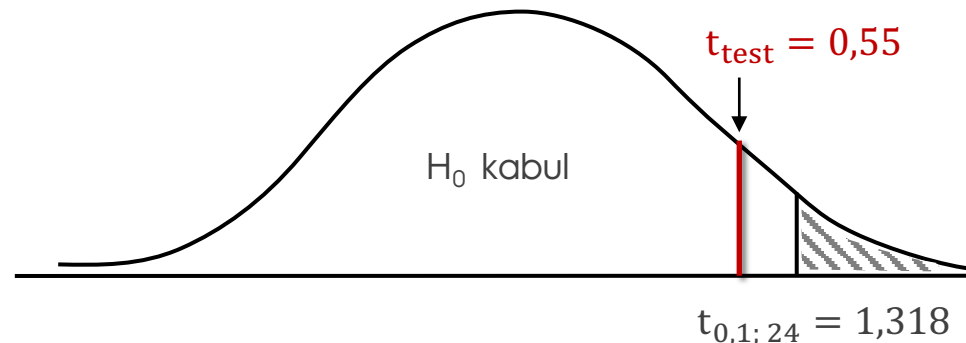
➤ σ^2 bilinmediğinden ve $n < 30$ olduğundan t istatistiği kullanılır. Serbestlik derecesi $n-1=24$ olmak üzere $t_{\alpha, n-1} = t_{0,1; 24} = 1,318$ olarak bulunur.

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Çözüm:

➤ $n = 25$; örneklem ortalaması $\bar{X} = 53,1$ ve standart sapma $S = 10$ olmak üzere

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{53,1 - 52}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 0,55 \text{ olarak bulunur.}$$



$t_{\text{test}} < t_{\alpha, n-1}$ yani $0,55 < 1,318$ olduğuna göre H_0 'ı reddedemeyiz.

Buna göre, ortalama fatura tutarının 52 doların üzerinde olduğuna dair yeterli kanıt yoktur.

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

- Hipotez testi için kullanılan bir diğer yol da P-değerini hesaplayıp testin anlamlılık düzeyi ile karşılaştırmaktır. σ^2 'ı bilinmeyen ND'ye sahip bir kitleden seçilen $n < 30$ hacimli örneklem için hipotez testinde P-değer şu şekilde hesaplanır:

P-değer $< \alpha$ ise H_0 Ret (tek yanlı testler için)

$2(\text{P-değer}) < \alpha$ ise H_0 Ret (iki yanlı testler için)

$$P - \text{değer} = \begin{cases} P(t_{n-1} < t_{\text{test}}), H_1: \mu < \mu_0 \text{ ise} \\ P(t_{n-1} > t_{\text{test}}), H_1: \mu > \mu_0 \text{ ise} \\ P(t_{n-1} < t_{\text{test}}), H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ ve } t_{\text{test}} < 0 \text{ ise} \\ P(t_{n-1} > t_{\text{test}}), H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ ve } t_{\text{test}} > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

Örnek: Bir konserve fabrikasının imal ettiği konservelerin üzerinde brüt 455 gr yazmaktadır. Bu konservelerin brüt ağırlıkları ile ilgili bir karar vermek üzere rasgele seçilen 17 kutunun ortalama ağırlığı 450 gr ve standart sapması 13 gr bulunmuştur. ND'ye uyduğu bilinen bu konservelerin brüt ağırlığının 455 gr olmadığını 0.05 önem seviyesinde söyleyebilir miyiz?

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi kuralım; $H_0: \mu = 455$

$$H_1: \mu \neq 455$$

➤ σ^2 bilinmediğinden ve $n < 30$ olduğundan t istatistiği kullanılır. $n = 17$; örneklem ortalaması $\bar{X} = 450$ ve standart sapma $S = 13$ olmak üzere

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{450 - 455}{\frac{13}{\sqrt{17}}} \cong 1,54$$

Kitle Ortalaması μ için Hipotez Testi

- $t_{\text{test}} = 1,54 > 0$ olduğuna göre $P\text{-değer} = P(t_{n-1} > t_{\text{test}}) = P(t_{16} > 1,54)$ değeri tablodan bulunur.
- t tablosunda 16 s.b.'de 1,54 değeri yoktur ancak $P(t_{16} > 1,337) = 0,1$ ve $P(t_{16} > 1,746) = 0,05$ olduğu biliniyor. Buna göre; $0,1 < P\text{-değer} < 0,05$ olarak kabul edilir.
- Hipotez iki yönlü olduğu için $0,2 < 2(P\text{-değer}) < 0,1$ alınır.
- $2(P\text{-değer}) \geq \alpha$ ise H_0 Kabul edilir.
- $\alpha = 0,05$ olduğu için $2(P\text{-değer})$ 'in bulunduğu aralığın α 'dan büyük olduğu aşıkardır.
- Buna göre; $H_0: \mu = 455$ hipotezi kabul edilir. Yani fabrikada üretilen konservelerin brüt ağırlığının 455 gr olmadığını söyleyemeyiz.

Kitle Varyansı σ^2 için Hipotez Testi

- n bağımsız gözleme dayanarak, normal dağılıma uyan bir kitlenin varyansı σ^2 'nin önceden belirlenen σ_0^2 gibi bir değere eşit olup olmadığını veya benzer şekilde kitlenin standart sapması σ 'nın önceden belirlenmiş bir σ_0 değerine eşit olup olmadığını test etmek istediğimizde X^2 test istatistiğini kullanırız.

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Hipotezlerinin testi için kullanılacak X^2 test istatistiği şu şekilde tanımlanır:

$$X^2_{\text{test}} = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Kitle Varyansı σ^2 için Hipotezler ve Karar Kuralları

Hipotez	Karşıt Hipotez	Test İstatistiği	Ret Bölgesi
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$X^2_{\text{test}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$X^2_{\text{test}} < X^2_{1-\alpha, n-1}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$		$X^2_{\text{test}} > X^2_{\alpha, n-1}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$X^2_{\text{test}} > X^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $X^2_{\text{test}} < X^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$
$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$		$X^2_{\text{test}} < X^2_{1-\alpha, n-1}$
$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$		$X^2_{\text{test}} > X^2_{\alpha, n-1}$

Kitle Varyansı σ^2 için Hipotez Testi

Örnek: Bir çimento fabrikasında üretilen çimentodan yapılan betonların dayanımına ilişkin standart sapmanın 1,24 kg/mm² olduğu iddia edilmektedir. Bu iddiayı test etmek üzere fabrikanın üretiminden rasgele alınan 25 birimlik örneğin ortalama dayanma miktarı ölçülmüştür. Bu ölçümlerin ortalaması 25 kg/mm² ve varyansı da 2.4 olarak hesaplanmıştır. Bu verilere göre, $\alpha=0.01$ önem düzeyinde fabrika yöneticilerinin iddiasının doğru olduğu söylenebilir mi?

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi kuralım; $H_0: \sigma^2 = 1,24^2$

$$H_1: \sigma^2 > 1,24^2$$

- $n-1 = 25-1 = 24$ serbestlik derecesinde tek yönlü X^2 dağılımının $\alpha=0.01$ önem düzeyinde tablo değeri;

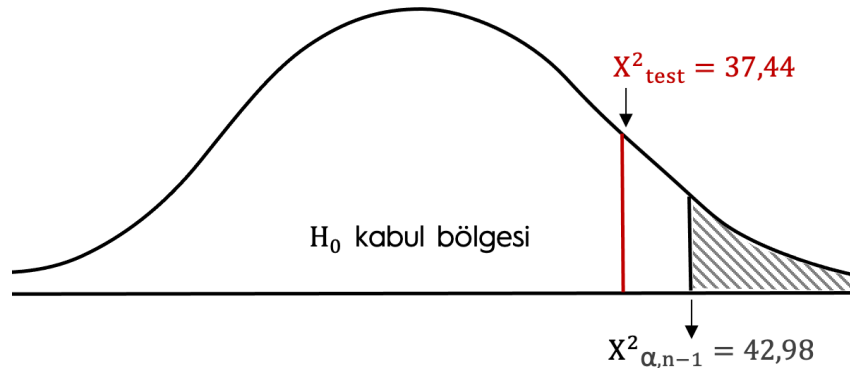
$$X^2_{\alpha, n-1} = X^2_{0,01;24} = 42,98 \text{ olarak bulunur.}$$

Kitle Varyansı σ^2 için Hipotez Testi

- Buna göre X^2 test istatistiği şu şekilde hesaplanır:

$$X^2_{\text{test}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 * 2,4}{1,24^2} = 37,44$$

- $X^2_{\text{test}}(37,44) < X^2_{\alpha, n-1}(42,98)$ olduğu için H_0 reddedilemez.



- Yani, %1 önem ya da %99 güven düzeyinde, fabrika yöneticilerinin betonların dayanımına ilişkin iddiasının doğru olduğu söylenebilir.

Kitle Oranı π için Hipotez Testi

- Kitle parametresi π için hipotez testinde, örneklem hacmi n yeterince büyük ise ($n\pi \geq 5$ ve $n(1-\pi) \geq 5$) ve kitle ND'ye uyuyorsa Z test istatistiği kullanılır.
- $p = \frac{X}{n}$ olmak üzere; p 'nin örnekleme dağılımının ortalaması ve standart sapması:

$$\mu_p = \pi \quad \text{ve} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}$$

Olmak üzere Z test istatistiği şu şekilde hesaplanır:

$$Z_{\text{test}} = \frac{p - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$

Kitle Oranı π için Hipotezler ve Karar Kuralları

Hipotez	Karşıt Hipotez	Test İstatistiği	Ret Bölgesi
$H_0: \pi = \pi_0$	$H_1: \pi < \pi_0$	$Z_{\text{test}} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$	$Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha}$
$H_0: \pi = \pi_0$	$H_1: \pi > \pi_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha}$
$H_0: \pi = \pi_0$	$H_1: \pi \neq \pi_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2}$ $Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2}$
$H_0: \pi \geq \pi_0$	$H_1: \pi < \pi_0$		$Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha}$
$H_0: \pi \leq \pi_0$	$H_1: \pi > \pi_0$		$Z_{\text{test}} > Z_{\alpha}$

Kitle Oranı π için Hipotez Testi

Örnek: Bir pazarlama şirketi, gönderdiği mektupların %8'ine dönüş yapıldığını iddia etmektedir. Bu iddiayı test etmek amacıyla rasgele seçilen 500 kişiye mektup gönderilmiş ve bunlardan 25 tanesine dönüş yapılmıştır. Şirketin bu iddiasını $\alpha = 0.05$ önem seviyesinde test edelim.

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi kuralım; $H_0: \pi = 0,08$

$$H_1: \pi \neq 0,08$$

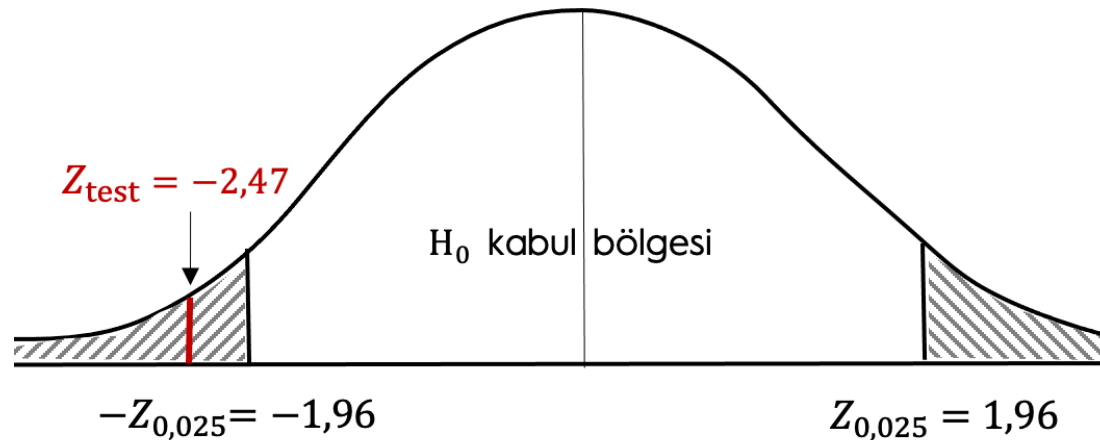
➤ $X = 25$ ve $n = 500$ olduğuna göre $p = 25/500 = 0,05$

➤ $\alpha = 0,05$ olmak üzere, çift yönlü hipotez olduğu için $\pm Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = \pm 1,96$ bulunur

Kitle Oranı π için Hipotez Testi

➤ Bu durumda Z test istatistiği:

$$Z_{\text{test}} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}} = \frac{0,05 - 0,08}{\sqrt{\frac{0,08(1 - 0,08)}{500}}} = -2,47$$



$$Z_{\text{test}}(-2,47) < -Z_{\frac{\alpha}{2}}(-1,96)$$

olduğu için H_0 hipotezi reddedilir.
Yani şirketin gönderdiği
mektuplara yapılan dönüş oranı
%8'den farklıdır.

Kitle Oranı π için Hipotez Testi

Örnek: Bir basketbol oyuncusu yaptığı atışların %60'ında sayı elde ettiğini söylemektedir. Bu oyuncu bir dönem boyunca yaptığı 100 atıştan 70'inde sayı elde etmiş ise oyuncunun atışlarında gelişme olduğu %5 anlam düzeyinde söylenebilir mi?

Çözüm: $H_0: \pi = 0,60$

$H_1: \pi > 0,60$

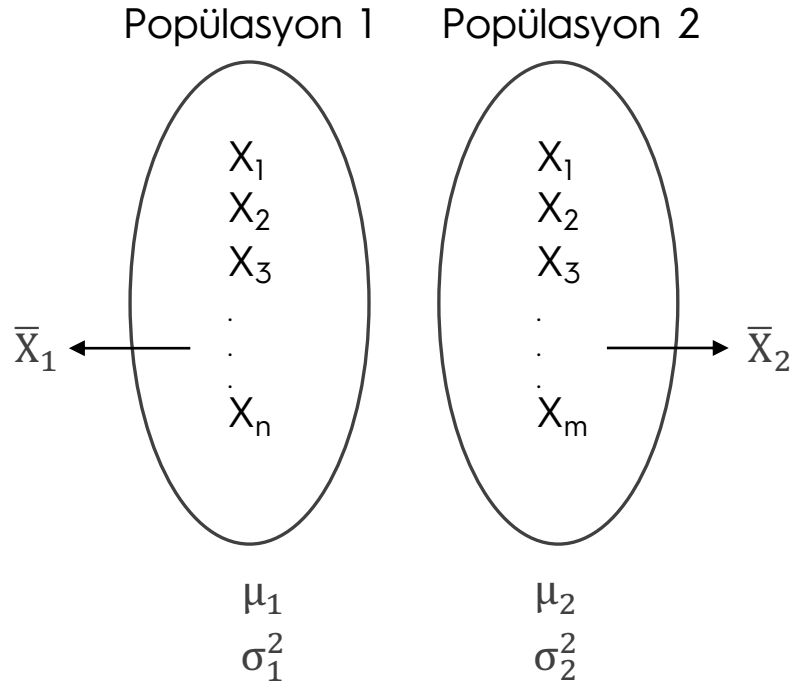
- $\alpha = 0,05$ olmak üzere, tek yönlü hipotez olduğu için $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$ bulunur.
- $X = 70$ ve $n = 100$ olduğuna göre $p = 70/100 = 0,70$ olduğuna göre;

$$Z_{\text{test}} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}} = \frac{0,70 - 0,60}{\sqrt{\frac{0,60(1 - 0,60)}{100}}} = 2,4$$

- $2,4 > 1,645$ yani $Z_{\text{test}} > Z_\alpha$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Bu durumda oyuncunun sayı elde etme yüzdesinde artış görülmektedir.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

Gerçek hayatta pek çok deneyde, özellikleri farklı iki kitlenin ortalamalarının karşılaştırılması istenir.



$\mu_1 - \mu_2$ farkı için hipotez testi yaparken 2 farklı test istatistiğinin kullanımı söz konusudur:

- Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyorsa ya da σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ancak $n > 30$ ve $m > 30$ ise Z test istatistiği,
- Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyorsa ancak $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ise ya da $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ise t test istatistiği kullanılır.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

➤ $H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	veya	➤ $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
	$H_1: \mu_1 < \mu_2$			$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$
	$H_1: \mu_1 > \mu_2$			$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

1. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyorsa:

➤ n ve m normal dağılıma sahip iki farklı kitleden seçilen bağımsız rassal örneklemeler olmak üzere, bu kitlelerin ortalamaları arasındaki fark için hipotez testinde Z test istatistiği kullanılır:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

Örnek: Ankara'da yaşayan insanların aylık ortalama kültürel harcamalarının İstanbul'da yaşayan insanların aylık ortalama kültürel harcamasından büyük olduğu iddia edilmektedir. Bu iddiayı test etmek amacıyla her iki şehirden de 6'şar insanın aylık kültürel harcamaları incelenmiştir.

Ankara	30	40	45	70	60	45
İstanbul	35	30	40	60	40	45

Yığınlara ilişkin varyanslar $\sigma_1^2 = 25$ ve $\sigma_2^2 = 16$ ve dağılımlar normal ise $\alpha=0,05$ anlam düzeyinde test sonucu ne olur?

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \mu_1 = \mu_2$

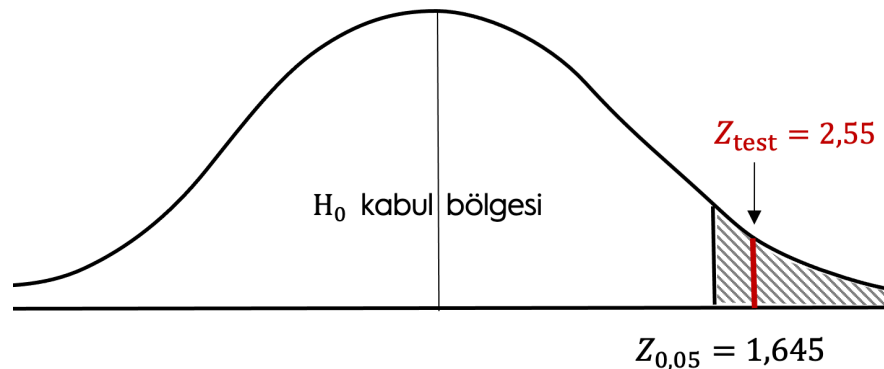
$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

➤ $\bar{X}_1 = \frac{290}{6} = 48,33$ ve $\bar{X}_2 = \frac{250}{6} = 41,66$ olarak hesaplanır.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

- $\alpha=0,05$ ve tek yönlü hipotez olduğuna göre $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$ olarak bulunur.
- Buna göre z test istatistiği:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{(48,33 - 41,66) - (0)}{\sqrt{\frac{25}{6} + \frac{16}{6}}} = 2,55$$



$Z_{\text{test}} > Z_\alpha$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Yani Ankara'da yaşayan insanların aylık ortalama kültürel harcamalarının İstanbul'da yaşayan insanlarınkine göre daha fazla olduğu söylenebilir.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

2. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ancak $n > 30$ ve $m > 30$ ise:

- Bu hipotez testi işleminde de Z tablosu ve Z test istatistiği kullanılır.
- Yalnızca σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmediği için bu parametreler yerine örneklem varyansları olan S_1^2 ve S_2^2 kullanılır. Buna göre Z test istatistiği şu şekilde hesaplanır:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

Örnek: Aynı faaliyet kolunda üretim yapan fabrikaların birincisinden tesadüfi olarak seçilen 80 mamulün ortalama dayanma süresi 135 gün ve standart sapması 15 gün; ikincisinden alınan 95 mamulün ise ortalama dayanma süresi 130 gün ve standart sapması 18 gündür. %1 önem seviyesinde, birinci fabrikada üretilen mamullerin ortalama dayanma süresinin daha fazla olduğunu söyleyebilir miyiz?

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \mu_1 = \mu_2$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

➤ $\alpha=0,01$ ve tek yönlü hipotez olduğuna göre $Z_\alpha = Z_{0,01} = 2,33$ olarak bulunur.

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{(135 - 130) - (0)}{\sqrt{\frac{225}{80} + \frac{324}{95}}} = 2$$

➤ Bu durumda $Z_{\text{test}} < Z_\alpha$ olduğu için H_0 hipotezi kabul edilir.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

3. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ancak eşit kabul ediliyor:

- $n < 30$ ve $m < 30$ olmak üzere kitle varyanslarının bilinmediği ancak birbirine eşit kabul edildiği durumda $n+m-2$ serbestlik dereceli t kritik değeri ve t test istatistiği kullanılır.
- Örneklemelerden elde edilecek varyanslar ile ortak varyans hesaplanır:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

- t test istatistiği hesaplanır:

$$t_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

Örnek: Üniversiteyi aile yanında okuyan öğrenciler ile şehir dışında okuyan öğrencilerin başarı not ortalamaları arasında fark olduğu iddia edilmektedir. Bunu test etmek amacıyla aile yanında okuyan 21 öğrenci rasgele seçilmiş ve bu öğrencilerin genel akademik not ortalaması 3,27; standart sapması 1,30 olarak ölçülmüştür. Benzer şekilde üniversiteyi şehir dışında okuyan 25 öğrencinin de genel akademik not ortalaması 2,53 ve standart sapması 1,16 olarak bulunmuştur. Her iki popülasyonun da eşit varyanslarla normal dağıldığı varsayımı altında %5 önem seviyesinde bu iddiayı test edelim.

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \mu_1 = \mu_2$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

- Serbestlik derecesi $n+m-2 = 21+25-2 = 44$ olmak üzere iki yönlü hipotez için t kritik değeri $\pm t_{\alpha/2; n+m-2} = \pm t_{0,025; 44} = 2,0154$ olarak bulunur.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

- ortak varyans S_p^2 :

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{(20)1,30^2 + (24)1,16^2}{21+25-2} = 1,50 ; S_p = 1,22$$

- t test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$t_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{(3,27 - 2,53) - (0)}{1,22 \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{25}}} = 2,044$$

- Bu durumda $t_{\text{test}} > t_{\alpha/2, n+m-2}$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Yani üniversitede aile evinde kalan öğrenciler ile şehir dışında okuyan öğrencilerin not ortalamaları arasında bir fark vardır.

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

4. Durum: Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ve eşit kabul edilmiyor:

- $n < 30$ ve $m < 30$ olmak üzere kitle varyanslarının bilinmediği ve $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ kabul edildiği durumda yine t tablosu ve t test istatistiği kullanılır. İlk olarak t test istatistiği şu şekilde hesaplanır:

$$t_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

- $t_{\alpha;v}$ kritik değeri için dikkate alınacak serbestlik derecesi şu şekilde hesaplanır:

$$v = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m} \right]^2}{\frac{\left(\frac{1}{n} \right)^2 (S_1^2)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{m} \right)^2 (S_2^2)^2}{m-1}}$$

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

Örnek: Mart ayında Rize ilinin ortalama hava sıcaklığının Trabzon ilinden daha fazla olduğu iddia edilmektedir. Rize ilinin son 15 yıllık kayıtlarına bakıldığında mart aylarındaki hava sıcaklığının ortalaması 14°C ve standart sapması 4°C'dir. Trabzon ilinin son 10 yıllık kayıtlarına göre aynı ay için ortalama hava sıcaklığı 10°C ve standart sapması 2 °C'dir. Gözlemlerin farklı varyanslı normal kitlelerden alındığı varsayımı altında, %1 önem düzeyinde bu iddiayı test edelim.

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \mu_1 = \mu_2$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\text{Serbestlik derecesi } v = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m} \right]^2}{\frac{\left(\frac{1}{n} \right)^2 (S_1^2)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{m} \right)^2 (S_2^2)^2}{m-1}} = \frac{\left[\frac{16}{15} + \frac{4}{10} \right]^2}{\frac{\left(\frac{1}{15} \right)^2 (16)^2}{15-1} + \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^2 (4)^2}{10-1}} \cong 22$$

İki Ortalamamanın Farkı için Hipotez Testi

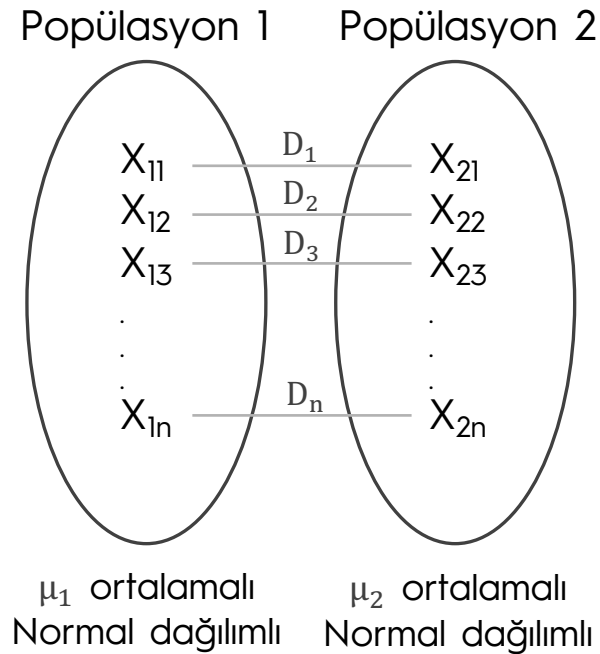
- $\alpha=0,01$ önem seviyesinde tek yönlü hipotez için $t_{\alpha;v}$ kritik değeri $t_{0,01;22} = 2,508$
- Bu durumda t test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$t_{\text{test}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} = \frac{(14 - 10) - (0)}{\sqrt{\frac{16}{15} + \frac{4}{10}}} \cong 3,28$$

- Bu durumda $t_{\text{test}} > t_{\alpha;v}$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Yani Mart ayında Rize ilinin ortalama hava sıcaklığı Trabzon ilinden daha fazladır.

İlgili Ölçüm Çiftleri için Hipotez Testi

➤ Pek çok durumda çiftler halinde elde edilen gözlemlere (eşleştirilmiş gözlemlere) dayanarak iki yığının ortalaması karşılaştırılmak istenebilir.



- $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ farkları, $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ortalamalı σ_D^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir
- $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum D_i$ ise: $\bar{D}$, $\mu_{\bar{D}}$ ortalamalı σ_D^2/n varyanslı normal dağılıma sahiptir.
- Bu durumda $Z_{\text{test}} = \frac{\bar{D} - \mu_{\bar{D}}}{\sigma_D/\sqrt{n}}$ istatistiği geçerli olup standart normal dağılıma [$Z_D \sim N(0;1)$] sahiptir.
- σ_D^2 'nin bilinmediği durumlarda ise $t_{\text{test}} = \frac{\bar{D} - \mu_{\bar{D}}}{S_D/\sqrt{n}}$ istatistiği kullanılır.

İlgili Ölçüm Çiftleri için Hipotez Testi

Hipotezler iki farklı şekilde kurulabilir:

➤ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

veya

➤ $H_0: \mu_D = 0$ $H_1: \mu_D \neq 0$

$H_1: \mu_D < 0$

$H_1: \mu_D > 0$

İlgili Ölçüm Çiftleri için Hipotez Testi

Örnek: 10 sekreterin daktilo ile yazma kursuna gitmeden önce ve gittikten sonra 1 dk içinde yazabildikleri kelime sayısı aşağıda verilmiştir. Sayıların ND'ye uyduğu kabul edilmektedir. Kursun etkili olduğunu %5 önem düzeyinde söyleyebilir miyiz?

Sekreter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Önce	40	47	33	54	61	39	42	47	58	50
Sonra	52	45	51	60	58	69	65	63	59	72

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \mu_D = 0$

$$H_1: \mu_D < 0$$

D_i	-12	2	-18	-6	3	-30	-23	-16	-1	-22
-------	-----	---	-----	----	---	-----	-----	-----	----	-----

İlgili Ölçüm Çiftleri için Hipotez Testi

- Buna göre; $\bar{D} = -12,3$; $S_D^2 = 130,45$ ve $S_D = 11.42$ olmak üzere t test istatistiği:

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{D} - \mu_{\bar{D}}}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{-12,3 - 0}{11,42/\sqrt{10}} = -3,41$$

- $\alpha=0,05$ önem seviyesinde tek yönlü hipotez için $-t_{\alpha;v}$ kritik değeri $-t_{0,05;9} = -1,883$
- $-3,41 < -1,883$ yani $t_{\text{test}} < -t_{\alpha;v}$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Bu durumda sekreterlerin daktilo kursuna gittikten sonra 1dk içinde yazdıkları kelime sayısında artış olduğu söylenebilir.

İki Kitlenin Varyansları için Hipotez Testi

- $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ ve $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2m}$ σ_1^2 ve σ_2^2 varyanslı normal dağılıma sahip iki kitleden alınmış n ve m birimlik rassal örneklemeler olmak üzere, bu örneklemelerin varyansı S_1^2 ve S_2^2 ; σ_1^2 ve σ_2^2 'nin yansız tahmin edicileridir.
- Bu iki kitlenin varyanslarının eşitliği ile ilgili hipotezi test etmek amacıyla $n-1$ ve $m-1$ serbestlik dereceli F dağılımından yararlanılır. Bu durumda test istatistiği şu şekilde olur:

$$F_{\text{test}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Normal Dağılımlı
İki Kitlenin
Varyanslarının
Eşitliği İçin
Hipotezler ve
Karar Kuralları

Hipotez	Karşıt Hipotez	Test İstatistiği	Ret Bölgesi
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F_{\text{test}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{\text{test}} < F_{n-1, m-1; 1-\alpha},$
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F_{\text{test}} > F_{n-1, m-1; \alpha},$
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$		$F_{\text{test}} > F_{n-1, m-1; \frac{\alpha}{2}}$ $F_{\text{test}} < F_{n-1, m-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$
$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F_{\text{test}} < F_{n-1, m-1; 1-\alpha},$
$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F_{\text{test}} > F_{n-1, m-1; \alpha},$

$$\alpha \leq 0,25 \text{ için } F_{n-1, m-1; 1-\alpha} = \frac{1}{F_{m-1, n-1; \alpha}}$$

İki Kitlenin Varyansları için Hipotez Testi

Örnek: İki çeşit hayvan ırkının karşılaştırılması çalışmalarında A ve B ırkından 16 sarı fare alınmış ve bu farelerin kapısı açılmış bir kafesten ayrılmadan önce geçirdikleri zaman ölçülmüştür. İki örneklem için de kaçıştan önceki ortalama bekleme zamanı aynı ancak ilk grubun varyansı 104sn, ikinci grubunki 51 sn'dir.

Bu veriler, A ırkından olan fareler için kaçış öncesi bekleme zamanındaki değişebilirliğin B ırkından olanlara göre daha fazla olduğunu gösteren yeterli delil midir? %5 anlam düzeyinde test ediniz.

İki Kitlenin Varyansları için Hipotez Testi

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$\text{Test istatistiği } F_{\text{test}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{104}{51} = 2,04$$

- Serbestlik derecesi $n-1 = 15$; $m-1 = 15$ olmak üzere $\alpha=0,05$ önem seviyesinde tek yönlü hipotez için $F_{n-1,m-1; \alpha} = F_{15,15; 0,05} = 2,40$ bulunur.
- $F_{\text{test}}(2,04) < F_{n-1,m-1; \alpha}(2,40)$ olduğu için H_0 hipotezi kabul edilir.
- Yani A ırkı için kafesten kaçmadan önceki bekleme zamanının daha değişken olduğuna dair iddiayı destekleyecek yeterli veri bulunmamaktadır.

İki Kitlenin Oranları için Hipotez Testi

- Ana kitle oranı π ve örneklem oranı p olmak üzere, iki kitlenin oranları arasındaki fark için hipotez testinde Z tablosu ve Z test istatistiği kullanılır.
- n ve m iki farklı kitleden rassal olarak alınan örneklemeler olmak üzere Z test istatistiği şu şekilde hesaplanır:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1 * (1 - p_1)}{n} + \frac{p_2 * (1 - p_2)}{m}}}$$

- $H_0: \pi_1 = \pi_2$ $H_1: \pi_1 \neq \pi_2$ $Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha/2}$ veya $Z_{\text{test}} > Z_{\alpha/2}$ ise H_0 ret
- $H_1: \pi_1 < \pi_2$ $Z_{\text{test}} < -Z_{\alpha}$ ise H_0 ret
- $H_1: \pi_1 > \pi_2$ $Z_{\text{test}} > Z_{\alpha}$ ise H_0 ret

İki Kitlenin Oranları için Hipotez Testi

Örnek: Bir video kaset kiralayıcısı, bulunduğu bölgedeki erkeklerin ve kadınların kiralamakta olduğu aksiyon filmi sayısında farklılık olup olmadığını merak etmektedir. Bunun üzerine bu kişi, belirli bir süre içerisinde dükkanına gelen 60 erkekten 51'nin ve 40 kadından 20'sinin aksiyon filmi kiraladığını gözlemlemiştir. Bu verilere göre bölgedeki erkeklerin kadınlardan daha fazla aksiyon filmi kiraladığını %5 önem seviyesinde söyleyebilir miyiz?

Çözüm: Aksiyon filmi kiralayan erkeklere ait örneklem oranı $p_1 = 51/60 = 0,85$

Aksiyon filmi kiralayan kadınlara ait örneklem oranı $p_2 = 20/60 = 0,40$

İki Kitlenin Oranları için Hipotez Testi

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \pi_1 = \pi_2$

$$H_1: \pi_1 > \pi_2$$

- $p_1 = 0,85$ ve $p_2 = 0,5$ olmak üzere Z test istatistiği:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1 * (1 - p_1)}{n} + \frac{p_2 * (1 - p_2)}{m}}} = \frac{(0,85 - 0,5) - (0)}{\sqrt{\frac{0,85 * 0,15}{60} + \frac{0,5 * 0,5}{40}}} \cong 3,8$$

- $\alpha=0,05$ önem seviyesinde tek yönlü hipotez için $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$
- $Z_\alpha(1,645) < Z_{\text{test}}(3,8)$ olduğuna göre H_0 hipotezi reddedilir.
- Yani, bahsi geçen bölgede erkeklerin kadınlardan daha fazla aksiyon filmi kiraladığı söylenebilir.

İki Kitlenin Oranları için Hipotez Testi

Örnek: Bir mağazanın müdürü, elindeki A ve B tipi ürünlerden A tipinin B'ye göre %10 daha fazla satıldığını iddia etmektedir. Bu nedenle yapılan incelemede son satışlarda 200 kişiden 56'sının A tipini; 150 kişiden 29'unun B tipini aldığı gözlemlenmiştir. %6 önem düzeyinde A ve B tipi arasındaki satış farkının %10 olması hipotezine karşı %10'dan az olduğu hipotezini test edelim.

Çözüm: İlk olarak hipotezlerimizi oluşturalım; $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0,1$

$$H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0,1$$

- A tipi ürünü alanlara ait örneklem oranı $p_1 = 56/200 = 0,28$
- B tipi ürünü alanlara ait örneklem oranı $p_2 = 29/150 = 0,19$

İki Kitlenin Oranları için Hipotez Testi

- $p_1 = 0,28$ ve $p_2 = 0,19$ olmak üzere Z test istatistiği:

$$Z_{\text{test}} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1 * (1 - p_1)}{n} + \frac{p_2 * (1 - p_2)}{m}}} = \frac{(0,28 - 0,19) - (0,1)}{\sqrt{\frac{0,28 * 0,72}{200} + \frac{0,19 * 0,81}{150}}} \cong -0,222$$

- $\alpha=0,06$ önem seviyesinde tek yönlü hipotez için $-Z_\alpha = -Z_{0,06} = -1,555$
- $-Z_\alpha(-1,555) < Z_{\text{test}}(-0,222)$ olduğuna göre H_0 hipotezi reddedilemez.
- Yani A tipinin B'ye göre %10 daha fazla satıldığını iddiası doğrudur.