



T.C.  
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ  
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ



# Mühendislik İstatistiği-I / Olasılık

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATMA BETÜL YENİ

# Temel Kavramlar

---

**Sonuç (Outcome):** Bir deneyde meydana gelebilecek olası bir sonucu veya gözlemi temsil eder. Deneyin belirli, bireysel bir sonucudur.

**Örnek Uzay (Sample Space):** Deneyin tüm olası sonuçlarını içeren kümedir.

**Deney (Experiment):** Sonuçları toplamak için yapılan herhangi bir eylem veya süreçtir.

**Rastgele Deney (Random Experiment):** Aynı koşullar altında farklı sonuçlar üretebilen bir eylem veya süreçtir. Sonuçlardaki değişkenlik, sürecin içsel rastgeleliği veya belirsizliği nedeniyle olur.

# Temel Kavramlar

---

**Olay (Event):** Bir deneyin sonuçları arasından bir veya birden fazla sonucun birleşimini temsil eder. Bir olay, örnek uzayın alt kümesidir ve bu nedenle olayın tüm sonuçları bilinmelidir.

**Basit Olay (Simple Event):** Yalnızca bir sonuçtan oluşur. Yani, sadece bir deney sonucunu ifade eder.

**Bileşik Olay (Compound Event):** Birden fazla sonucun birleşiminden oluşur. Yani, birden fazla deney sonucunu içerir.

# Temel Kavramlar

---

| Deney                     | Sonuçlar     | Örnek Uzayı         | Olay                      |
|---------------------------|--------------|---------------------|---------------------------|
| Paranın bir kez atılması  | Yazı, Tura   | $S=\{Y,T\}$         | Bir Tura gelmesi          |
| Zarın bir kez atılması    | 1,2,3,4,5,6  | $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ | Zarın 3'den büyük gelmesi |
| Öğrencinin sınav sonucu   | Geçti, Kaldı | $S=\{G,K\}$         | Öğrencinin Geçmiş olması  |
| Doğacak bebeğin cinsiyeti | Erkek, Kız   | $S=\{E,K\}$         | Bebeğin Kız olması        |
| Paranın iki kez atılması  | YY,YT,TY,TT  | $S=\{YY,YT,TY,TT\}$ | Bir Y, bir T gelmesi      |

# Olasılık Nedir?

---

- Olasılık, ihtimal veya şans olarak da açıklanan, bir olayın oluşma şansının sayısal bir ölçüsüdür.
- Genellikle bir olayın sonucunun ne olabileceği, gelecekte ne ile karşılaşılacağı gibi soruların cevaplanmaya çalışıldığı durumları ifade etmede kullanılır.
- Olasılık;
  - Oran (0 ile 1 arasında)
  - Yüzde (%0 ile %100 arasında)ifade edilir.

# Olasılık

---

**Tanım:** Bir deney, eşit olasılıklı  $N$  farklı sonuç verirse ve bu sonuçların  $M$  tanesi bir  $A$  olayına uygunsa,  $A$  olayının  $P(A)$  ile gösterilen gerçekleşme olasılığı şu şekilde ifade edilir:

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

**Örnek:** Bir zar atıldığında çift gelme olasılığı nedir?

Örnek Uzay  $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ve Çift sayı elde edilmesi durumu  $A$  ise;

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

# Olasılık

---

**Örnek:** Bir 52'lik karttan bir kart çekilirse çekilen kartın?

- a) Kupa birlisi
- b) Kupa
- c) Birli gelme olasılığı nedir?

a)  $A = \{\text{Kart kupa birlisidir}\}$  ol. üzere  $P(A) = \frac{1}{52}$

b)  $B = \{\text{Kart kupadır}\}$  ol. üzere  $P(B) = \frac{13}{52} = 0,25$

c)  $C = \{\text{Kart birlidir}\}$  ol. üzere  $P(C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

# Olasılık

---

**Örnek:** Olasılık dersini 4 kız 6 erkek öğrenci almaktadır. Öğrenciler bir sınavdan aldıkları puana göre sıralanacaktır. Öğrencilerin birbirinden farklı notlar aldığı varsayımı altında, **a)** kaç farklı sıralama yapılabilir? **b)** Sıralamada ilk dörtte kadınların olma olasılığı nedir?

a) Sıralama için bir kural bulunmamaktadır.  $10! = 3628800$  farklı sıralama olabilir.

a) Sıralamada ilk dörtte kadınların bulunması durumu A olmak üzere;

$A = 4!.6! = 17280$  farklı durum vardır.

Bu durumda  $P(A) = \frac{4!.6!}{10!} = \frac{1}{210}$  olur.

# Olasılık

---

**Örnek:** Bir torbadaki 10 toptan 2'si rasgele çekiliyor. Bu topların 3 ve 7 numaralı toplar olma olasılığı nedir?

10 top içerisinde bir defada 2 topun seçimlerinin sayısı  $\binom{10}{2} = 45$  olur.

Seçilen bu iki topun 3 ile 7 olması tek 1 durumdur.

Bu durumda  $P(3 \text{ ve } 7) = \frac{1}{45}$  olur.

- Torbadan top seçiminde çekilen top torbaya geri atılsaydı ve yeni top bu şekilde seçilseydi cevap ne olurdu

# Olasılık

---

**Tanım:** Bir deney  $n$  kez yapıldığında bir  $A$  olayı  $f$  kez gerçekleşirse,  $f/n$  oranına  $A$  olayının relatif frekansı denir.

- $n$  artarken  $f/n$  relatif frekansının bir limite yaklaştığını kabul edersek, bu limite  $A$ 'nın olasılığı denir.
- Eşit olasılıklı olmayan sonuçlar veren deneyler için kullanılır.

# Olasılık

**Örnek:** Bir zarın 100 kez atılmasından sonra aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Buna göre, 2 gelme olasılığı nedir?

| Zarın üstündeki Sayı | Tekrar Sayısı (Frekans) |
|----------------------|-------------------------|
| 1                    | 21                      |
| 2                    | 18                      |
| 3                    | 14                      |
| 4                    | 17                      |
| 5                    | 10                      |
| 6                    | 20                      |

2 gelme olayına A dersek;

$$P(A) = \frac{f}{n} = \frac{18}{100} = 0,18$$

# Olasılık Aksiyomları

---

**D** bir deney ve **S** bu deneyin örnek uzayı olsun. O halde **S** 'deki bir **A** olayının  $P(A)$  olasılığı ile ilgili 3 temel aksiyom vardır:

- **Aksiyom 1:** Her **A** olayı için  $0 \leq P(A) \leq 1$  'dir.
- **Aksiyom 2:** **S** örnek uzayı için  $P(S) = 1$  'dir.
- **Aksiyom 3:**  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  bir **S** örnek uzayında sonlu ya da sonsuz sayıda ayrık olaylar dizisi olsun. Bu durumda,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

şeklinde ifade edilir.

# Olasılık Aksiyomları

---

**Örnek:** Bir çift zar atma deneyinde, üst tarafa gelen sayıların toplamı 7 gelme olasılığı nedir?

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

# Olasılık Aksiyomları

---

**Örnek:** m açık iş pozisyonu için n adayın başvurduğunu varsayalım ( $n > m$ )

a) n aday arasından m adayı kaç farklı şekilde seçebiliriz?

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$$

b) Özeli bir A adayı, bu personel seçimlerinden kaçında bulunur?

$$\binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot (n-1-m+1)!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot (n-m)!}$$

c) A adayının seçilme olasılığı nedir?

$$P(A) = \frac{\frac{(n-1)!}{(m-1)! \cdot (n-m)!}}{\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}} = \frac{(n-1)! \cdot m! \cdot (n-m)!}{n! \cdot (m-1)! \cdot (n-m)!} = \frac{m}{n}$$

# Olasılık Aksiyomları

**Örnek:** KARADUT kelimesinin bir permütasyonunda iki «A» nın yan yana gelme olasılığı nedir?

1 'K' harfi  
2 'A' harfi  
1 'R' harfi  
1 'D' harfi  
1 'T' harfi

Toplamda 7 harf ile yazılabilecek kelimelerin sayısı

$$N = \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

İki A harfinin yan yana gelmesi durumunda uygun sonuç sayısı = 6! olur

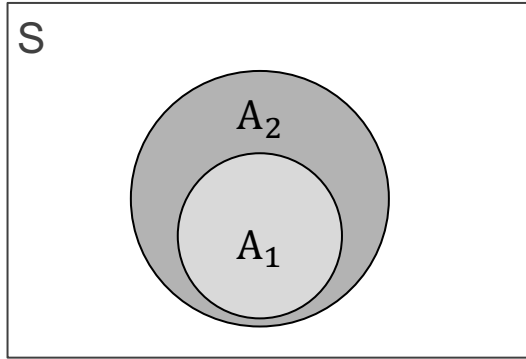
Bu durumda, iki A harfinin yan yana geldiği duruma M dersek, M'nin olasılığı

$$P(M) = \frac{6!}{7!} = \frac{2}{7}$$

# Olasılık Kuralları

**Teorem:**  $A_1$  ve  $A_2$  bir  $S$  örnek uzayında  $A_1 \subset A_2$  olacak biçimde iki olay ise,  $P(A_1) \leq P(A_2)$  'dir.

**İspat:**



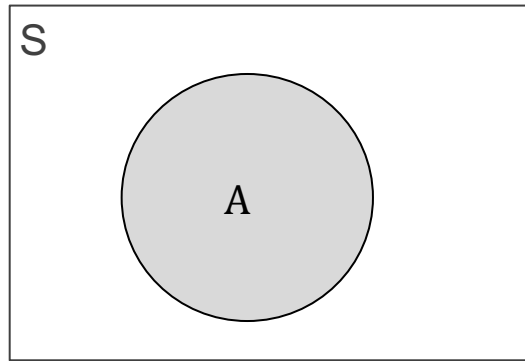
- $A_2$  olayı ayrık iki olayın birleşimi olarak;  
 $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A'_1)$  şeklinde yazılır.
- $A_1 \cap (A_2 \cap A'_1) = \emptyset$  olduğundan  $A_1$  ve  $(A_2 \cap A'_1)$ 'i ayrık olaylar olarak varsayıp 3. aksiyomu kullanarak  $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A'_1)$  olarak yazarız.
- 1. aksiyom gereği  $P(A_2 \cap A'_1) \geq 0$  olduğundan;  
 $P(A_2) \geq P(A_1)$  olur.

# Olasılık Kuralları

---

**Teorem:** Herhangi bir  $A \subset S$  olayı için  $P(A) \leq 1$  'dir.

**İspat:**



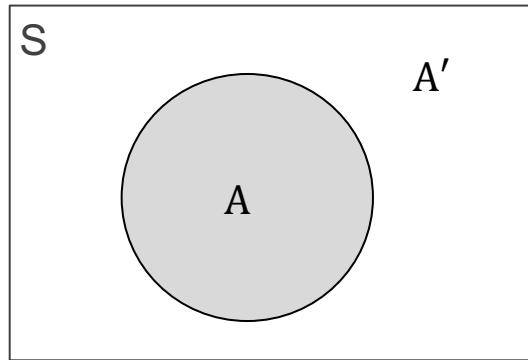
- $P(S) \geq P(A)$  dir.
- 2. Aksiom gereği  $P(S) = 1$  olduğu göz önüne alınırsa;  
 $1 \geq P(A)$  bulunur.

# Olasılık Kuralları

---

**Teorem:**  $A$ , bir  $S$  örnek uzayında her hangi bir olay ise,  $P(A') = 1 - P(A)$  dır.

**İspat:**



- $A \cup A' = S$  ve  $A \cap A' = \emptyset$  olduğuna göre; 3. Aksiom gereği  $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(S)$  yazılır.
- 1. Aksiom gereği  $P(S) = 1$  olduğuna göre;  
 $P(A) + P(A') = 1$  yani  $P(A') = 1 - P(A)$  bulunur.

# Olasılık Kuralları

---

**Teorem:**  $P(\emptyset) = 0$  'dır.

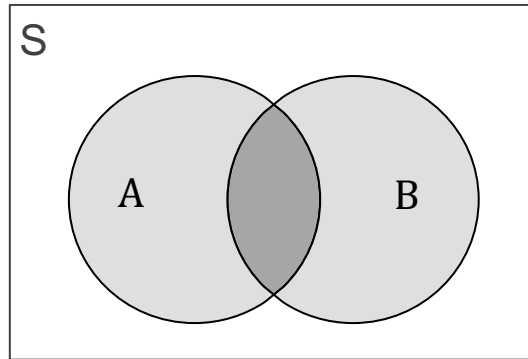
**İspat:**

- $\emptyset' = S$  ve  $P(\emptyset') = P(S) = 1$  olmak üzere
- $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset')$   
 $= 1 - 1 = 0$

# Olasılık Kuralları

**Teorem:** Bir  $S$  örnek uzayındaki  $A$  ve  $B$  olayları için  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$  'dir.

**İspat:**



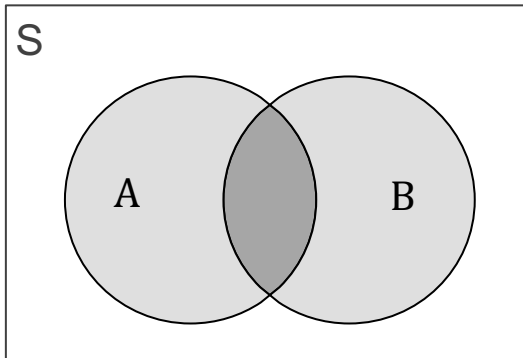
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$  olarak yazabiliriz.
- $(A \cap B)$  ve  $(A \cap B')$  ayrık olaylar olduğundan, 3. Aksiyomu kullanarak;

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap B')) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

# Olasılık Kuralları

**Teorem:** Bir  $S$  örnek uzayındaki  $A$  ve  $B$  olayları için  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  'dir.

**İspat:**



- $(A \cup B)$ 'yi  $(A \cup B) = A \cup (B \cap A')$  ve  $B$ 'yi  $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$  olarak alalım.
- 3. Aksiyom gereğince;  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$  ve  
 $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \rightarrow P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  bulunur.

# Olasılık Kuralları

---

**Örnek:** Bir para 3 kere atılsın. En az 1 kez tura gelme olasılığını bulalım.

- En az bir kere tura gelmesi olayı A olsun.
- Bu deney için örnek uzay  $S = \{TTT, TTY, TYT, YTT, YTY, TYY, YYT, YYY\}$
- A olayına uygun 7 durum vardır. Bu nedenle  $P(A) = 7/8$ 'dir.

Benzer şekilde;

- $P(A) + P(A') = 1$  olduğundan;

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$= 1 - 1/8 = 7/8$$

# Olasılık Kuralları

---

**Örnek:** İki zarın bir kez atılışında toplamın 7 ya da 10 gelme olasılığı nedir?

- Deney için örnek uzay  $S = 36$ 'dır.
- Toplamın 7 gelmesi olasılığı A; 10 gelmesi olasılığı B olsun.
- A için örnek noktalar; (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)
- B için örnek noktalar; (4,6); (5,5); (6,4)
- A ve B ayrık olaylar olduğuna göre

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\&= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} \\&= 0,25\end{aligned}$$

# Olasılık Kuralları

---

**Örnek:** 52 kartlık standart bir desteden rasgele bir kart çekildiğinde, bu kartın bir birli (As) ya da karo olma olasılığı nedir?

- Örnek uzay  $S = 52$ 'dir.
- Çekilen kartın karo olması durumu A; as olması durumu B olsun.
- Bu durumda;  $P(A) = \frac{13}{52}$        $P(B) = \frac{4}{52}$        $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$  'dir
- Böylece;  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

# Olasılık Kuralları

---

**Soru:** 52 oyun kartından oluşan bir desteden tekrar yerine koymadan 8 kart çekilmiştir. 3 as veya 3 papaz çekilme olasılığını bulunuz.

➤ Soruyu siz çözünüz.

# Olasılık Kuralları

---

**Örnek:** Bir  $S$  örnek uzayında  $A$  ve  $B$  olaylarını düşünelim.  $P(A)=0,4$  ve  $P(B)=0,7$  olsun.  $P(A \cap B)$  için minimum ve maksimum değer aralığı nedir?

➤ 1. durum:  $A \subset B$  ise,  $P(A) \leq P(B)$  olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$P(A \cap B) = P(A) = 0,4 \text{ olur.}$$

➤ 2. durum:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  eşitliğini dikkate alalım.

Burada  $P(A \cup B)$ 'nin en büyük değeri alması için  $P(A \cap B)$  minimum 0,1 olur.

➤ Buna göre;  $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$  olur.

# Olasılık Kuralları

---

**Teorem:**  $A_1$  ,  $A_2$  ve  $A_3$  bir  $S$  örnek uzayında üç olay ise,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \text{ olur.}$$

➤ İspatı kendiniz yapınız. İpucu:  $A_1 \cup A_2 = B$  diyerek ispata başlayınız.

**Teorem:**  $A_j$ 'ler ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$  olmak üzere)  $S$  örnek uzayında olaylar ise;

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

# Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

---

- **Kesikli (Süreksiz) Örnek Uzayı:** Bir deneyin örnek uzayı  $S = \{2, \dots, 36\}$  gibi sonlu sayıda ya da  $S = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  gibi sayılabilir sonsuzlukta eleman içeriyorsa bu örnek uzayına kesikli örnek uzayı denir.
- **Kesiksiz (Sürekli) Örnek Uzayı:** Bazen bir deneyin sonuçları ne sonlu ne de sayılabilir sonsuzluktadır. Örnek uzayı bir doğru parçası üzerindeki tüm noktalar veya bir düzlemdeki tüm noktalar olabilir. Bu örnek uzayına sürekli örnek uzayı denir.

# Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

---

**Tanım:** Örnek uzayın sayılabilir olmadığı durumlarda geometrik olasılık kullanılmaktadır. Bu durumda sürekli örnek uzay; uzunluk, alan, hacim gibi sonlu bir geometrik ölçüme sahiptir. Bu ölçüm  $m(S)$  ile gösterilirse;

➤ Bir  $A$  olayının olasılığı ( $A$ 'ya ait tüm noktaların olasılığı)  $P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$  'dır.

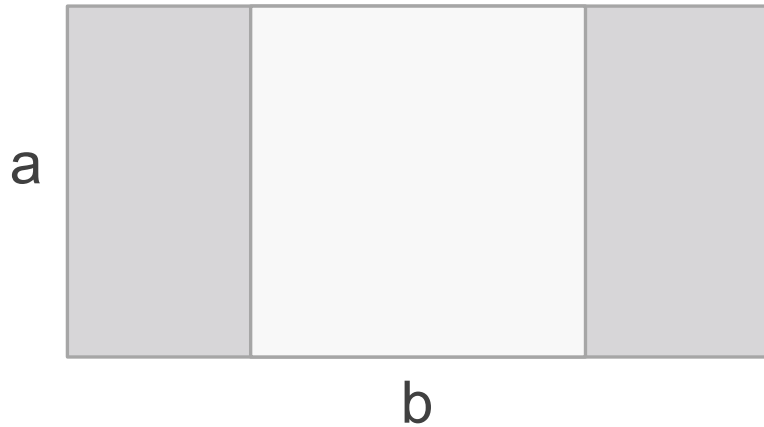
Örneğin; 
$$P(A) = \frac{A \text{ nın alanı}}{S \text{ nin alanı}}$$

$$P(A) = \frac{A \text{ nın hacmi}}{S \text{ nin hacmi}}$$

$$P(A) = \frac{A \text{ nın uzunluğu}}{S \text{ nin uzunluğu}}$$

# Örnek Uzaylar ve Geometrik Olasılık

**Örnek:** Bir dart oyununda, dikdörtgen şeklindeki hedef tahtasının ortasına bir kare çizilmiş olup oyuncunun bu kareyi tutturma olasılığı nedir?



- Örnek uzay S
- Hedefi tutturma durumu A olmak üzere;

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{A \text{ nın alanı}}{S \text{ nin alanı}} \\ &= \frac{a^2}{a \cdot b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

# Koşullu Olasılık

**Örnek:** Bir firmada çalışan 100 kişiye, üst düzey yöneticilere çok yüksek ücret ödenmesini onaylayıp onaylamadıkları sorulmuş ve aşağıdaki tabloda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

|        | ONAYLIYOR | ONAYLAMİYOR | TOPLAM |
|--------|-----------|-------------|--------|
| ERKEK  | 15        | 45          | 60     |
| KADIN  | 4         | 36          | 40     |
| TOPLAM | 19        | 81          | 100    |

- Eğer tek karakteristik dikkate alınırsa, seçilen çalışan Erkek/Kadın olabilir, onaylıyor/onaylamıyor olabilir.
- İşte bu dört karakteristik ya da olayın olasılıklarına basit (marjinal) olasılık adı verilir.
- Bu olasılıklara bileşen ya da marjinal olasılık denmesinin nedeni, bu olasılıkların, satır ya da sütun toplamlarının genel toplama bölünmesiyle bulunmasıdır.

# Koşullu Olasılık

|        | ONAYLIYOR    | ONAYLAMİYOR   | TOPLAM |             |
|--------|--------------|---------------|--------|-------------|
| ERKEK  | 15           | 45            | 60     | $P(E)=0,60$ |
| KADIN  | 4            | 36            | 40     | $P(K)=0,40$ |
| TOPLAM | 19           | 81            | 100    | -           |
|        | $P(On)=0,19$ | $P(Onm)=0,81$ | -      | <b>1</b>    |

$$P(E) = \frac{\text{Erkeklerin toplamı}}{\text{Tüm çalışan toplamı}} = \frac{60}{100} = 0,60$$

$$P(K) = \frac{\text{Kadınların toplamı}}{\text{Tüm çalışan toplamı}} = \frac{40}{100} = 0,40$$

$$P(\text{Onaylıyor}) = \frac{19}{100} = 0,19$$

$$P(\text{Onaylamıyor}) = \frac{81}{100} = 0,81$$

# Koşullu Olasılık

---

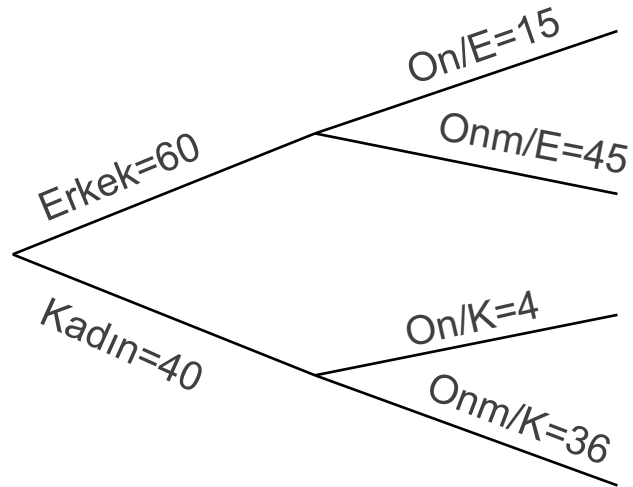
- Peki, seçilen kişinin erkek olması koşuluyla üst düzey yöneticilere yüksek ücret verilmesini onaylıyor olması olasılığı nedir? Bunu şöyle ifade edebiliriz:

$$P(\text{Onaylıyor/Erkek})$$

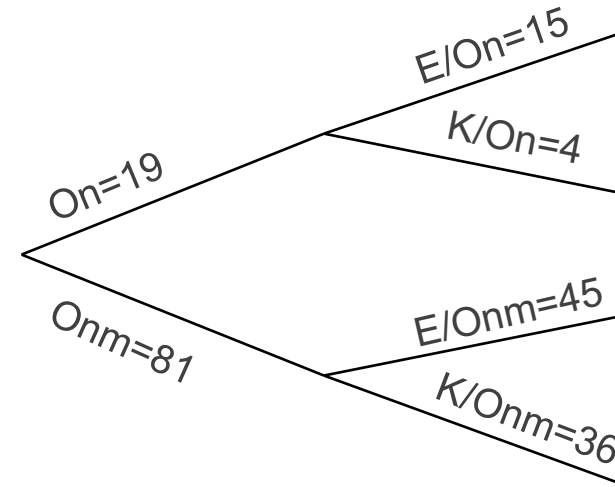
- Bu ifadeye onaylama'nın koşullu olasılığı denir ve «Çalışanın erkek olduğu bilindiğinde seçilen çalışanın ücret durumunu onaylama olasılığı» olarak açıklanır.

**Tanım:** Bir B olayın oluştuğunun bilinmesi durumunda, A olayın oluşma olasılığına koşullu olasılık denir ve  $P(A/B)$  şeklinde gösterilir.

# Koşullu Olasılık



$$\begin{aligned} P(\text{Onaylıyor/Erkek}) &= \frac{\text{Erkek sayısı}}{\text{Tüm çalışan erkek sayısı}} \\ &= \frac{15}{60} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(\text{Kadın/Onaylıyor}) &= \frac{\text{Kadın sayısı}}{\text{Tüm onaylayan sayısı}} \\ &= \frac{4}{19} \end{aligned}$$

# Koşullu Olasılık

---

**Tanım:** A ve B bir S örnek uzayında iki olay olsun. B verilmişken A'nın koşullu olasılığı  $P(A/B)$  şu şekilde tanımlanır;

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (P(B) \neq 0 \text{ ise})$$

Ya da  $P(A/B) \cdot P(B) = P(A \cap B), \quad (P(B) \neq 0 \text{ ise})$

Benzer şekilde;  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad (P(A) \neq 0 \text{ ise})$

$$P(B/A) \cdot P(A) = P(A \cap B), \quad (P(A) \neq 0 \text{ ise})$$

Sorularınız?