

SORULAR

S.1) $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$ ve $\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır. $S = \{(0, 2, 3), (1, -2, 3), (-2, 1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi verilsin. Buna göre,

(5p) a) S kümesi $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız mıdır?

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha(0, 2, 3) + \beta(1, -2, 3) + \gamma(-2, 1, 2) = 0$$

$$\Rightarrow \beta - 2\gamma = 0, \quad 2\alpha - 2\beta + \gamma = 0, \quad 3\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 2\gamma, \quad \alpha = \frac{3\gamma}{2}, \quad \frac{9\gamma}{2} + 6\gamma + 2\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 2\gamma, \quad \alpha = \frac{3\gamma}{2}, \quad \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

$$\Rightarrow S \text{ lineer bağımsızdır}$$

(5p) b) S kümesi $\mathbb{R}^3$ de üretici sistem midir?

$$\langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ dir}$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ için } (x, y, z) = \alpha(0, 2, 3) + \beta(1, -2, 3) + \gamma(-2, 1, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \beta - 2\gamma \\ y = 2\alpha - 2\beta + \gamma \\ z = 3\alpha + 3\beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8/y = 2\alpha - 2x - 3\gamma \\ 3/z = 3\alpha + 3x + 8\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8y + 3z = 25\alpha - 7x$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7x + 8y + 3z}{25} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{-12x - 3y + 2z}{25} \in \mathbb{R}, \quad \beta = \frac{x - 6y + 4z}{25} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subseteq \langle S \rangle$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$$

(5p) c) S kümesi $\mathbb{R}^3$ de taban mıdır? Açıklayınız.

S lineer bağımsız kümesi $\mathbb{R}^3$ de üretici sistem olduğundan S , $\mathbb{R}^3$ de tabandır.

(15p) S.2) $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$ ve $\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır. $A = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0 \text{ ve } 2x - y - z = 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ de bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = z$$

$$A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(0, 0, 0) \in A \neq \emptyset$$

$$(x_1, x_1, x_1), (x_2, x_2, x_2) \in A \text{ ve } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$(x_1, x_1, x_1) + (x_2, x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in A$$

$$\alpha(x_1, x_1, x_1) = (\alpha x_1, \alpha x_1, \alpha x_1) \in A$$

$$\Rightarrow A, \mathbb{R}^3 \text{ de alt uzaydır.}$$

S.3) (10p) a) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik matrisler ise $AB + BA$ matrisinin simetrik olup olmadığını bulunuz.

$$A, B \text{ simetrik} \Rightarrow A^T = A \text{ ve } B^T = B$$

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA \text{ simetrik matristir.}$$

(10p) b) $C \in M_n(\mathbb{R})$ idempotent matris ise $C(I - C) = [0]$ olduğunu gösteriniz.

$$C \text{ idempotent} \Rightarrow C^2 = C$$

$$C(I - C) = CI - C^2 = C - C = [0]$$

S.4) $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan fonksiyon verilsin.

(10p) a) f fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{ve} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f\left(\begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & t+d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & t+d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a & x+a \\ z+c & z+c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & x \\ z & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha X) &= f\left(\begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha z & \alpha t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha x \\ \alpha z & \alpha z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x & x \\ z & z \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha f(X) \end{aligned}$$

(10p) b) $\text{Ker} f$ ve $\text{Res} f$ alt uzaylarını belirleyiniz ve bu alt uzaylar için birer taban bulunuz.

$$\text{Ker} f = \left\{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : f(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} x & x \\ z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{bmatrix} : y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : y, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ kümesi lineer bağımsız ve } \text{Ker} f = \langle T \rangle \text{ old. dan}$$

T , $\text{Ker} f$ de tabandır.

$$\text{Res} f = \left\{ f(X) : X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ z & z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ kümesi lineer bağımsız ve } \text{Res} f = \langle K \rangle \text{ old. dan}$$

K , $\text{Res} f$ de tabandır.

(15p) S.5) $(I + 3D)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ eşitliğini sağlayan D matrisi varsa belirleyiniz.

$$D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{olsun}$$

$$\Rightarrow I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (I + 3D) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+3x & 3y \\ 3z & 1+3t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I = \begin{bmatrix} 1+3x+6z & 3y+2+6t \\ 2+6x+3z & 6y+1+3t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = 1+3x+6z \\ 0 = 3y+2+6t \\ 0 = 2+6x+3z \\ 1 = 6y+1+3t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2z \\ y = 2/3 \\ z = 2/3 \\ t = -2y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -4/3 \\ t = -4/3 \end{array}$$

$$\Rightarrow D = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(15p) S.6) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & \alpha \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ matrisinin tersinir (regüler) olması için $\alpha \in \mathbb{R}$ nasıl seçilmelidir?

E matrisini regüler yapan $\alpha \in \mathbb{R}$ değeri için E^{-1} matrisini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ k & m & n \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow a = k + 1, \quad b = m, \quad c = n$$

$$2x + a - k = 0, \quad 2y + b - m = 1, \quad 2z + c - n = 0$$

$$3a + \alpha k = 0, \quad 3b + \alpha m = 0, \quad 3c + \alpha n = 1$$

$$\Rightarrow x = -1/2, \quad y = 1/2, \quad z = 0$$

$$3k + 3 + \alpha k = 0, \quad 3m + \alpha m = 0, \quad 3n + \alpha n = 1$$

$$\alpha \neq -3 \Rightarrow k = \frac{-3}{\alpha + 3}, \quad m = 0, \quad n = \frac{1}{\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\alpha}{\alpha + 3}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ \alpha/(\alpha + 3) & 0 & 1/(\alpha + 3) \\ -3/(\alpha + 3) & 0 & 1/(\alpha + 3) \end{bmatrix}$$