

SORULAR

S.1) $f: (M_2(\mathbb{R}), +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, $f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = x + t$ ile tanımlanan fonksiyon verilsin.

(10p) a) f fonksiyonunun bir grup homomorfisi olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ için} \\ & f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x+a & y+b \\ z+c & t+d \end{bmatrix}\right) = x+a+t+d \\ & \qquad \qquad \qquad = x+t+a+d \\ & \qquad \qquad \qquad = f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

(10p) b) $\text{Ker} f$ ve $\text{Res} f$ kümelerini bulunuz

$$\text{Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x+t=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -t & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Res} f = \left\{ f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) : \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$$

$$= \{ x+t : x, t \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$$

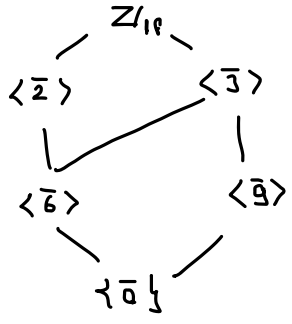
(5p) c) f fonksiyonu grup izomorfisi midir? Açıklayınız.

$$\text{Ker} f \neq \{0\} \text{ old. için } f \text{ 1-1 değildir}$$

$$\Rightarrow f \text{ izomorfi değildir.}$$

(15p) S.2) $\mathbb{Z}_{18}$ halkasının tüm ideallerini belirleyerek asal ve maksimal ideallerini bulunuz.

$$\Lambda(\mathbb{Z}_{18}) = \{ \{0\}, \langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{9} \rangle, \mathbb{Z}_{18} \}$$



$\langle \bar{2} \rangle \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}_{18}$ ve $\langle \bar{3} \rangle \subsetneq J \subsetneq \mathbb{Z}_{18}$ olacak şekilde

$I, J \in \Lambda(\mathbb{Z}_{18})$ idealleri mevcut olmadığından $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ maksimal ideallerdir.

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{18}$ ve $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \langle \bar{2} \rangle$ olsun

$$\Rightarrow 2 \mid xy \Rightarrow 2 \mid x \text{ veya } 2 \mid y \Rightarrow x \in \langle \bar{2} \rangle \text{ veya } y \in \langle \bar{2} \rangle$$

$\Rightarrow \langle \bar{2} \rangle$ asal idealdir.

Benzer şekilde, $\langle \bar{3} \rangle$ asal idealdir

$$\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{18} \text{ ve } \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{6} \in \langle \bar{6} \rangle \text{ fakat } \bar{x}, \bar{y} \notin \langle \bar{6} \rangle$$

$$\bar{y} \in \mathbb{Z}_{18} \text{ ve } \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{9} \in \langle \bar{9} \rangle \text{ fakat } \bar{x} \notin \langle \bar{9} \rangle$$

$$\bar{6}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{18} \text{ ve } \bar{6} \cdot \bar{y} = \bar{0} \in \{0\} \text{ fakat } \bar{6}, \bar{y} \notin \{0\}$$

old. dan $\langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{9} \rangle, \{0\}$ asal ideal değildir.

(15p) S.3) R değişmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $A = \{ra + sb : r, s \in R\}$ kümesinin R nin alt halkası ve ideali olup olmadığını bulunuz.

$$r = s = 0_R \text{ için } ra + sb = 0_R \in A \neq \emptyset$$

$$A \subseteq R$$

$$r_1 a + s_1 b, r_2 a + s_2 b \in A \text{ için}$$

$$(r_1 a + s_1 b) - (r_2 a + s_2 b) = (r_1 - r_2) a + (s_1 - s_2) b \in A$$

$$(r_1 a + s_1 b) \cdot (r_2 a + s_2 b) = (r_1 r_2 a + r_1 s_2 b) a + (s_1 r_2 a + s_1 s_2 b) b \in A$$

$\Rightarrow A, R$ nin alt halkasıdır.

$$ra + sb \in A \text{ ve } k \in R \text{ için}$$

$$k(ra + sb) = (kr)a + (ks)b \in A$$

$$(ra + sb)k = (rk)a + (sk)b \in A$$

$\Rightarrow A, R$ nin ideali dir.

(15p) S.4) R tamlik bölgesi ise $R[x]$ polinom halkasının tamlik bölgesi olduğunu gösteriniz.

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in R[x] \text{ olsun}$$

$$\exists 1_R = 1_R x^0 + 0_R x^1 + \dots + 0_R x^m \in R[x] : \forall p(x) \in R[x] \text{ için } 1_R p(x) = p(x) \cdot 1_R = p(x)$$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{t=0}^k a_t b_{k-t} \right) x^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{t=0}^k b_t a_{k-t} \right) x^k = q(x) p(x)$$

$\Rightarrow R[x]$ birimli deęisimli halkadır.

$$p(x) \neq 0_R, \quad d^+(p(x)) = m \text{ ve } q(x) \neq 0_R, \quad d^+(q(x)) = n \text{ olsun} \Rightarrow a_m \neq 0_R \text{ ve } b_n \neq 0_R$$

$$\text{Kabul edelim ki } p(x) \cdot q(x) = 0_R \text{ olsun} \Rightarrow \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k = 0, \quad c_k = \sum_{t=0}^k a_t b_{k-t}$$

$$\Rightarrow c_{m+n} = \sum_{t=0}^{m+n} a_t b_{m+n-t} = 0_R$$

$$* t > m \Rightarrow a_t = 0_R$$

$$* t < m \Rightarrow 0 < m-t \Rightarrow n < n+m-t \Rightarrow b_{m+n-t} = 0_R$$

$$\Rightarrow c_{m+n} = a_m b_{m+n-m} = a_m b_n = 0_R \xrightarrow{R \text{ tam. bölg.}} a_m = 0_R \text{ veya } b_n = 0_R \quad \nexists \text{ Çelişki}$$

$$\Rightarrow p(x) \cdot q(x) \neq 0_R$$

$\Rightarrow R[x]$ sıfır bölensiz olup tamlik bölgesidir.

(10p) S.5) $f(x) = 2x^5 + 2x^4 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomu için $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 2)q(x) + r(x)$ eşitliğini sağlayan $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, $\deg(r(x)) < 3$ polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + 2x^4 + x^2 + 2 & x^3 + 2x^2 + 2 \\ -2x^5 + x^4 + x^2 & 2x^2 + x + 1 \\ \hline x^4 + 2 & \\ -x^4 + 2x^3 + 2x & \\ \hline x^3 + x + 2 & \\ -x^3 + 2x^2 + 2 & \\ \hline x^2 + x & \end{array}$$

$$r(x) = x^2 + x$$

$$q(x) = 2x^2 + x + 1$$

S.6) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde aşağıda tanımlanan “+” ve “.” ikili işlemleri verilsin.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc + bd)$$

(10p) a) $(R, +, \cdot)$ üçlüsünün bir halka olduğunu gösteriniz.

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \end{aligned}$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$$

$$\exists (0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için } \exists (-a, -b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :$$

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0)$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ değişmeli gruptur.

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac, ad + bc + bd) \cdot (e, f) \\ &= (ace, acf + ade + bce + bde + adf + bcf + bdf) \\ &= (a, b) \cdot (ce, cf + de + df) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow “.”$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde birleşmelidir.

$$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) \\ &= (ae + ce, af + cf + be + de + bf + df) \\ &= (ae, af + be + bf) + (ce, cf + de + df) \\ &= (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f) \end{aligned}$$

$\Rightarrow “.”$, “+” üzerine sağdan dağılmalıdır.

Benzer şekilde, “.”, “+” üzerine soldan dağılmalıdır.

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkadır.

(5p) b) $(R, +, \cdot)$ halkası birimli ve değişmeli bir halka mıdır?

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc + bd) = (ca, cb + da + db) = (c, d) \cdot (a, b)$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ değişmeli halkadır.

$\exists (1, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0 \cdot a + 0 \cdot b) = (a, b)$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ birimli halkadır.

(5p) c) $(R, +, \cdot)$ halkasının bir tamlik bölgesi ve cisim olup olmadığını bulunuz.

$(a, 1), (1, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ için

$$(a, 1) \cdot (1, -1) = (a, a + 1 + (-1)) = (a, 0)$$

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamlik bölgesi değildir.

$(2, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için

$$(2, 2) \cdot (a, b) = (1, 0) \Rightarrow (2a, 2a + 4b) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow 2a = 1 \text{ ve } 2a + 4b = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ ve } b = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow (2, 2)^{-1}$ mevcut değildir.

$\Rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ cisim değildir.