ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki yüzeyler için birer parametrizasyon bulunuz:

a) $C: y = \cosh x$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey (Kateoid).

b) $C: (z-2)^2 + y^2 = 1$ eğrisinin y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey (Tor).

c) $C: z = x^2$ eğrisinin z-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey (Paraboloid).

2) Keyfi bir $X: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü için tanımlı X_u ve X_ϑ kısmi hız vektörleri için, D üzerinde aşağıdaki reel değerli fonksiyonlar verilsin:

$$E = X_u \cdot X_u, \quad F = X_u \cdot X_\vartheta, \quad G = X_\vartheta \cdot X_\vartheta.$$

Buna göre $\|X_u \times X_\vartheta\|^2 = EG - F^2$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca gösteriniz ki X bir regüler dönüşümdür ancak ve ancak $EG - F^2$ sıfırdan farklıdır.

3) Bir $p \in \mathbb{R}^3$ için $X(u,\vartheta) = p + \vartheta\delta(u)$ şeklinde parametrelenmiş yüzeye koni denir. Böylece görülür ki tüm çizgiler p noktasından geçer. Gösteriniz ki X regülerdir ancak ve ancak ϑ ve $\delta \times \delta'$ sıfırdan farklıdır.

4) Bir $q \in \mathbb{R}^3$ için $X(u,\vartheta) = \beta(u) + \vartheta q$ şeklinde parametrelenmiş yüzeye silindir denir. Böylece görülür ki tüm çizgiler paraleldir. Gösteriniz ki X regülerdir ancak ve ancak $\beta' \times q$ sıfırdan farklıdır.

5) Bir L doğrusu bir A eksenine yapıştırılsın. L sabit bir hızla A boyunca hareket ettirilirken aynı zamanda da döndürülürse, bu takdirde bir yüzey taranmış olur. Bu yüzeye helikoid denir. Eğer A ekseni z ekseni ise bu takdirde oluşan helikoid yüzeyi

$$X(u,\vartheta) = (u\cos\vartheta,\ u\sin\vartheta,\ b\vartheta), \quad b \neq 0$$

ile tanımlı $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dönüşümünün görüntüsüdür.

a) X in bir yama olduğunu gösteriniz.

b) X in parametre eğrilerini belirleyiniz.

c) Helikoidi $g=c$ kapalı formunda ifade ediniz.

6) a) $D: u>0$ bölgesi üzerinde $X(u,\vartheta) = (u\cos\vartheta,\ u,\ \sin\vartheta)$ verilsin. $X : D \to \mathbb{R}^3$ dönüşümünün regüler olduğunu gösteriniz.

b) X in görüntüsü $M: g=0$ yüzeyi olacak şekilde $g(x,y,z)$ fonksiyonunu bulunuz.