

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
SINAV KAĞIDI

Sınav Tarihi :/...../.....

Öğrenci No :
Adı, Soyadı :
Bölümü/Programı :
Dersin Adı :
Dersin Sorumlusu :



Değerlendirme	
Rakam ile	Yazı ile

☐

☐ II. Öğretim

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER FİNAL SINAVI / 10.01.2018

1) $y' = y \sin x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (15 puan)

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \sin x dx \quad \checkmark \quad 5 \text{ puan}$$

$$\ln y = -\cos x + C \quad \checkmark \quad 10 \text{ puan}$$

2) $y'' - y = e^x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ problemini LAPLACE ile çözünüz. (15 puan)

$$L[y(x)] = Y(s) \quad , \quad L[y''] = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

$$s^2 Y(s) - s - Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{s^2 - s + 1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$(s^2 - 1) Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s-1}$$

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{(s+1)(s-1)^2} \quad \checkmark \quad 10 \text{ puan}$$

$$y(x) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x \quad \checkmark \quad 5 \text{ puan}$$

3) $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$ sisteminin genel çözümünü bulunuz. ($x(t)=?$ $y(t)=?$) (15 puan)

$$\begin{aligned} (D-4)x + 3y &= 0 \\ -6x + (D+7)y &= 0 \end{aligned} \quad \checkmark \quad 5 \text{ puan} \Rightarrow 6x = y' + 7y$$

$$(D^2 + 3D - 28 + 18)y = 0$$

$$(D^2 + 3D - 10)y = 0$$

$$y = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t} \quad \checkmark \quad 5 \text{ puan}$$

$$x = \frac{1}{6} (-5c_1 e^{-5t} + 2c_2 e^{2t} + 7c_1 e^{-5t} + 7c_2 e^{2t})$$

$$x = \frac{1}{3} c_1 e^{-5t} + \frac{3}{2} c_2 e^{2t} \quad \checkmark \quad 5 \text{ puan}$$

4) $x^2 y'' + xy' - 4y = x^3, x \neq 0$ diferansiyel denklemini $y_1 = x^2$ özel çözümü yardımı ile çözünüz. (15 puan)

$$y = x^2 u, y' = 2xu + x^2 u', y'' = 2u + 4xu' + x^2 u'' \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$\Rightarrow 2x^2 u + 4x^3 u' + x^4 u'' + 2x^2 u + x^3 u' - 4x^2 u = x^3$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{5}{x} u' = \frac{1}{x}$$

$$u' = p, u'' = p'$$

$$\Rightarrow p' + \frac{5}{x} p = \frac{1}{x}$$

$$p = \frac{1}{5} + c_1 x^{-5} \quad \checkmark 5 \text{ puan} \Rightarrow u = \frac{1}{5} x - \frac{c_1}{4} x^{-4} + c_2 \Rightarrow y = \frac{1}{5} x^3 - \frac{c_1}{4 x^2} + c_2 x^2 \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

5) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6, x > 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (20 puan)

$$x = e^t, y' = e^{-t} \frac{dy}{dt}, y'' = -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 6$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 6 \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$y_p = b, y_p' = 0 = y_p'' \Rightarrow b = 3$$

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 3 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 x^2 + 3 \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

6) $y'' + 9y = \frac{2}{\cos 3x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (20 puan)

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$y_p = c_1(x) \cos 3x + c_2(x) \sin 3x$$

$$\begin{aligned} c_1' \cos 3x + c_2' \sin 3x &= 0 \\ -3c_1' \sin 3x + 3c_2' \cos 3x &= \frac{2}{\cos 3x} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &3 \sin 3x \\ &\cos 3x \end{aligned}$$

$$c_1' = -\frac{c_2' \sin 3x}{\cos 3x} = -\frac{2}{3} \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$c_1 = \frac{2}{9} \ln |\cos 3x| \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$3c_2' = 2$$

$$c_2' = \frac{2}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3} x \quad \checkmark 5 \text{ puan}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \\ &+ \frac{2}{9} \cos 3x \ln |\cos 3x| + \\ &+ \frac{2}{3} x \sin 3x \quad \checkmark 5 \text{ puan} \end{aligned}$$