

- 1) $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümünü elemanter satır (indirgeme) işlemlerini kullanarak bulunuz. (20 Puan)

$$\begin{array}{l} \nearrow -3 \quad \searrow -2 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -7 & -7 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -11 & -7 \end{array} \right] \begin{array}{l} -1) \\ \searrow \end{array} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 2 \\ 5y - 7z = -7 \\ -4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0, y = -\frac{7}{5}, x = -\frac{4}{5}$$

- 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörlerini bulunuz. (15 Puan)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28 = (\lambda+4)(\lambda-7)$$

$$(\lambda+4)(\lambda-7) = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 7$$

$$\lambda_2 = 7 \text{ için;}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- 3) Kutupsal denklemi $r^2 - 2r(\cos\theta + 2\sin\theta) = 4$ olan eğrinin, (i) kartezyen koordinatlardaki denklemini bulunuz. (10 Puan) (ii) koordinat düzleminde grafiğini çiziniz. (5 Puan)

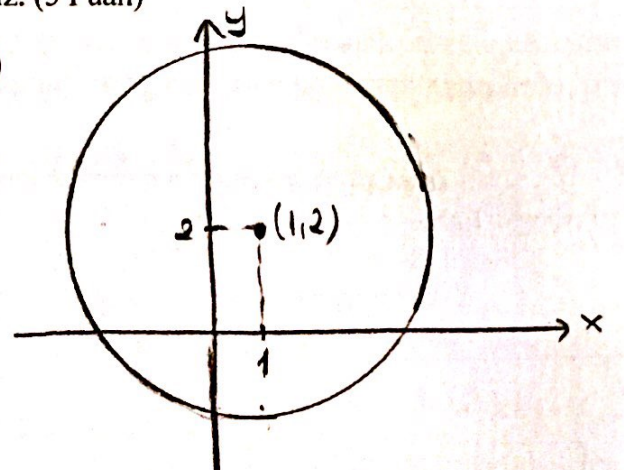
$$i) x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$$

ii)

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$



- 4) $x^2 + xy + y^2 = 9$ denklemi ile verilen eğrinin türünü (tipini) belirleyip, eksenleri $\frac{\pi}{4}$ radyan döndürerek koordinat düzleminde grafiğini çizin. (15 Puan)

$$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \leadsto \text{elips}$$

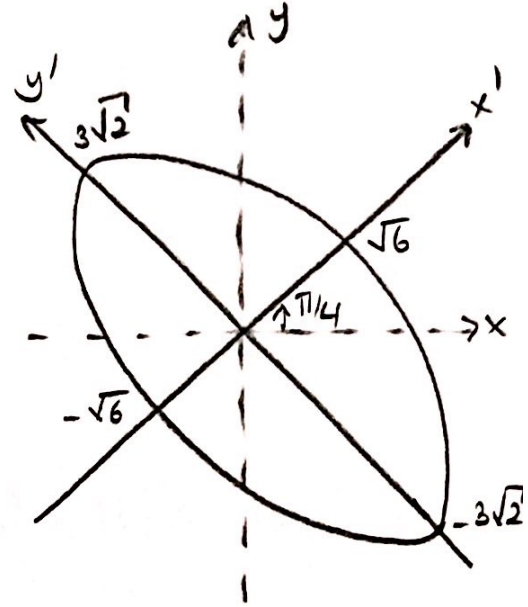
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 9$$

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 + x'^2 - y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2 = 18$$

$$3x'^2 + y'^2 = 18$$

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{18} = 1$$



- 5) $\vec{r}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} + \frac{t}{\sqrt{2}}\vec{k}$ denklemi ile verilen eğri için $\frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2} = ?$ (15 Puan)

$$\vec{r}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r}''(t) = -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t) = \frac{1}{8}\sin^2\frac{t}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{8}\cos^2\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\vec{r}'''(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{k}$$

- 6) $B(-1, 0, 1)$ noktası ve $d \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ doğrusu için; (i) B noktasının d doğrusuna olan uzaklığını bulunuz. (10 Puan) (ii) B noktasından geçen ve d doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz. (10 Puan)

$$i) \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ (doğrultma vektör)}$$

$$A(1, 0, -1) \text{ (doğru üzerindeki nokta)}$$

$$\vec{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{AB} \times \vec{v}\| &= 2\sqrt{3} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{6} \end{aligned} \right\} l = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$$

$$ii) 2x + y - z + d = 0$$

$$2(-1) + 0 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

$$2x + y - z + 3 = 0$$