KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

SINAV KAĞIDI

Sınav Tarihi :......../......../............ .

Değerlendirme	
Rakam İle	Yazı İle

Öğrenci No :..

Adı, Soyadı :..

Bölümü/Programı :..

Dersin Adı :..

Dersin Sorumlusu :

☐ ☐ II. Öğretim

2019-2020 GÜZ YARIYILI DİFERANSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

(09.11.2019) Süre 90 dk. dır.

1) $V=(x^2+y)U_1-2yzU_2-3U_3$, $f(x,y,z)=x^3y^2z$, $v_p=(-1,0,2)_p$ ve $p=(1,-2,3)$ olmak üzere:

a) $V(p)=?$ $(\mathbf{5p})$

b) $V[f](p)=?$ $(\mathbf{10p})$

c) $df(v_p)=?$ $(\mathbf{5p})$

2) $e_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)_p$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)_p$, $e_3=(0,0,1)_p$ olmak üzere, bu vektörlerin $p\in\mathbb{R}^3$ noktasında bir çatı lanı oluşturduğunu gösteriniz. $v_p=(-2,1,3)_p$ vektörünü bu çatı cinsinden ifade ediniz. $(\mathbf{20p})$

3) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(u,v)=(u^2,v^2,uv)$ dönüşümü verilsin.

a) Bu dönüşümün regülerliğini araştırınız. $(\mathbf{10p})$

b) $v=(2,3)$ ve $p=(1,1)$ olmak üzere $F_*(v_p)$ yi bulunuz. $(\mathbf{10p})$

4) $\alpha(t)=(e^t cost, e^t sint, e^t)$ eğrisi veriliyor.

a) α eğrisinin birim hız parametrelenişini bulunuz. $(\mathbf{10p})$

b) α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından $\alpha(1)$ noktasına kadar olan yayının uzunluğunu hesaplayınız. $(\mathbf{10p})$

5) $\beta(s)=\left(2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},2\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ eğrisi verilsin.

a) β eğrisinin Frenet büyüklüklerinin (T,N,B,κ,τ) bulunuz. $(\mathbf{10p})$

b) β eğrisinin bir çember olup olmadığını belirleyiniz. $(\mathbf{10p})$

DİFERANSİYEL GEOMETRİ CEVAP ANAHTARI
(09.11.2019)

1) a) $V(p) = \left((x^2 - y)U_1 - 2yzU_2 - 3U_3\right)(p)$

$= (x^2(p) - y(p))U_1(p) - 2y(p)z(p)U_2(p) - 3U_3(p)$

$= (1-2)U_1(p) - 2(-2).3U_2(p) - 3U_3(p)$

$= -U_1(p) + 12U_2(p) - 3U_3(p) = (-1, 12, -3)_p$

b) $V[f](p) = V(p)[f]$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(p)V_1(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)V_2(p) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)V_3(p)$

$= (3x^2y^2z)(p)(-1) + (2x^3yz)(p)12 + (x^3y^2)(p)(-3)$

$= 3x^2(p)y^2(p)z(p).(-1) + 2x^3(p)y(p)z(p).12 + x^3(p)y^2(p)(-3)$

$= -36 - 144 - 12 = -192$

c) $df[v_p] = \frac{\partial f}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)v_3$

$= -36 + 8 = -28$

2) $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1$

$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$

$v_p = (v_p \cdot e_1)e_1 + (v_p \cdot e_2)e_2 + (v_p \cdot e_3)e_3$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_2 + 3e_3$

$= \frac{3}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + 3e_3$

3) $F_* = (df_1, df_2, df_3)$, $F = (f_1, f_2, f_3)$

$= (2u\,du,\ 2v\,dv,\ v\,du + u\,dv)$

a) $F_*(w_p) = 0$ için $w_p \overset{?}{=} 0$, $w_p = (w_1, w_2, w_3)_p$

$F_*(w_p) = \left(2u(p)du(w_p),\ 2v(p)dv(w_p),\ v(p)du(w_p) + u(p)dv(w_p)\right)_{F(p)}$

$= (2p_1w_1,\ 2p_2w_2,\ p_2w_1 + p_1w_2)_{F(p)}$

$F_*(w_p)$ için $2p_1w_1 = 0$ ...(1)

$2p_2w_2 = 0$ ...(2)

$p_2w_1 + p_1w_2 = 0$ ...(3)

$P_1 \neq 0$ ve $P_2 = 0$ için denklem (1) ve (3) ten $w_p = (0,0)$ dır.

$P_1 = 0$ ve $P_2 \neq 0$ için denklem (2) ve (3) ten $w_p = (0,0)$ dır.

Bu takdirde, $(P_1, P_2) \neq (0,0)$ ise F regülerdir.

b) $F_*(v_p) = (2.1.2\ ,\ 2.1.3,\ 1.2 + 1.3)_{F(p)}$

$= (4, 6, 5)_{F(p)}$

4) a) $\alpha'(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t, e^t)$

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)+e^{2t}}$$

$$=e^t\sqrt{3}$$

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{3}e^u du=\sqrt{3}(e^t-1)$$

$$\Rightarrow e^t=\frac{s}{\sqrt{3}}+1 \Rightarrow t=\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$$

$$\beta(s)=e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)}\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)}\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), e^{\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)}$$

$$=\left(\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)$$

b) $$l=\int_0^1 \sqrt{3}e^t dt=\sqrt{3}e^t\Big|_0^1=\sqrt{3}(e-1)$$

5) a) $\beta'(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\|\beta'(s)\|=1$

$\Rightarrow T(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$T'(s)=\left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0\right)$

$\kappa(s)=\|T'(s)\|=\frac{1}{4}$

$N(s)=\left(-\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0\right)$

$$B(s)=T(s)\times N(s)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$B'(s)=\left(\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{4}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0\right)$

$\tau(s)=-B'(s)\cdot N(s)=\frac{1}{4}$

b) $\tau(s)\neq 0$ olduğundan bir çember belirtmez.