

Adı ve Soyad:

Numara:

2017-2018 BAHAR YARIYILI MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ
MÜHENDİSLİK MATEMATİĞİ (Z.MAT 2018) DERSİ DÖNEM SONU SINAVI SORULARIDIR.
05.06.2018

- 1)
$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözümünü matrisler yardımıyla bulunuz. (15 puan)}$$
- 2) $\{x_1 = (3,2,6), x_2 = (7,3,9), x_3 = (5,1,3)\}$ vektör kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz. (15 puan)
- 3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bu öz değerlerden büyüğüne karşılık gelen öz vektörü bulunuz. (15 puan)
- 4) $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = x_2, 2x_2 + x_3 = 0, x_i \in R\}$ kümesi R^3 ün alt uzayı mıdır? (15 puan)
- 5) $M_{2 \times 2}$ reel vektör uzayında (tüm 2×2 tipli matrislerin, matrislerdeki toplama ve reel sayı ile çarpma işlemlerine göre oluşturduğu vektör uzayı)
- $$v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- vektörleri veriliyor. $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesinin $M_{2 \times 2}$ reel vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını belirleyiniz. (20 puan)
- 6) $V = C[a, b]$ ve $W = R$ için $int: V \rightarrow W$, $int(f) = \int_a^b f(x)dx$ fonksiyonunun lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz. Burada $C[a, b]$, $[a, b]$ aralığındaki tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayıdır. (20 puan)

Not: Sınav süresi 90 dakikadır. İlk 30 dakika sınav salonunu terk etmek yasaktır.

$$1) \begin{array}{c} -3 \quad -1 \quad -2 \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow -2-5 \\ \leftarrow -2-5 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -7 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{array}$$

$$2) c_1(3, 2, 6) + c_2(7, 3, 9) + c_3(5, 1, 3) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$3c_1 + 7c_2 + 5c_3 = 0$$

$$2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$$

$$6c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0 \quad \checkmark \text{ } 5p$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow -5-3 \\ \leftarrow -5-3 \end{array} = \begin{vmatrix} -7 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{oldugundan } \checkmark \text{ } 5p \\ \text{vektör kümesi} \\ \text{lineer bağımlıdır.} \end{array}$$

$$3) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \vee \lambda = -1 \quad \checkmark \text{ } 10p$$

$$\lambda_1 = 4 \text{ için}$$

$$\lambda = -1 \text{ için}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2k \\ 3k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \checkmark \text{ } 5p$$

$$\vec{u}_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

4) i) Her $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in W$ için

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ olduğundan } x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ 2x_2 + x_3 = 0, 2y_2 + y_3 = 0 \text{ olduğundan } 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3 = 0 \end{array} \right\} \text{eğer ediliyor,}$$

Bu takdirde, $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in W$ dir.

✓ 5p

ii) Her $(x_1, x_2, x_3) \in W$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in W \text{ dir. Çünkü; } x_1 = x_2 \text{ olduğundan}$$

$$\lambda x_1 = \lambda x_2 \text{ ve } 2x_2 + x_3 = 0 \text{ olduğundan } 2\lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(2x_2 + x_3) = 0 \text{ dir.}$$

$$\text{iii) } 0 = 0 \text{ ve } 2 \cdot 0 + 0 = 0 \text{ olduğundan } (0, 0, 0) = \vec{0} \in W \text{ dir.}$$

✓ 5p

W kümesi, $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayıdır.

✓ 5p

$$5) i) c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{array} \right\} c_2 = 0, c_1 = 0$$

$S = \{0_1, 0_2, 0_3, 0_4\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

✓ 10p

ii) Her $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$ için

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \end{array} \right\} \lambda_2 = \frac{a+b}{2}, \lambda_1 = \frac{b-a}{2}$$

✓ 5p

$$\lambda_3 = c, \lambda_4 = d$$

olduğundan $M_{2 \times 2}$ nin her bir elemanı $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesinin elementlerinin lineer toplamı şeklinde yazılabilir.

(i) ve (ii) den $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesi $M_{2 \times 2}$ reel vektör uzayının bir tabanıdır. ✓ 5p

6) i) Her $f, g \in C[a, b]$ için,

$$\begin{aligned} \text{int}(f+g) &= \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ &= \text{int}(f) + \text{int}(g) \quad \checkmark 10p \end{aligned}$$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} \text{int}(\lambda f) &= \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \\ &= \lambda \text{int}(f) \end{aligned}$$

olduğundan $\text{int}(f) = \int_a^b f(x) dx$ fonksiyonu lineer denektir. ✓ 10p