Öğrenci No	:..
Adı, Soyadı	:..
Bölümü/Programı	:..
Dersin Adı	:..
Dersin Sorumlusu	:..

Rakam İle	Yazı ile

☐ ☐ II. Öğretim

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ DÖNEM SONU SINAVI SORULARIDIR.
(07.01.2019)

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = \frac{\ln x}{x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. (15 p.)
2) $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz. (15 p.)
3) $\left.\begin{aligned} x' &= 2x + 3y \\ y' &= 4x + y \end{aligned}\right\}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü öz değer ve öz vektörleri kullanarak bulunuz. (15 p.)
4) $\left.\begin{aligned} x' + x - y &= \cos t \\ 4x + y' - 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz. (20 p.)
5) $y'' + xy' = 0$ diferansiyel denkleminin $y = \sum a_n x^n$ formundaki seri çözümünün ilk yedi terimini bulunuz. (15 p.)
6) $ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz. (20 p.)

NOT: Sınav süresi 100 dakikadır. İlk 30 dakika salonu terk etmek yasaktır.

CEVAP ANAHTARI

1) $x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = te^{-t}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = te^{-t} \Rightarrow y_h = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$

$y_p = (at+b)e^{-t} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{36}$

$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} - \frac{1}{6}te^{-t} + \frac{1}{36}e^{-t}$

$y(x) = c_1x^2 + c_2x^{-3} - \frac{1}{6}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{36x}$

2) $y=e^{x}u \Rightarrow y'=(u+u')e^{x}$, $y''=(u+2u'+u'')e^{x}$

$xe^{x}(u+2u'+u'')-(2x-1)e^{x}(u+u')+(x-1)e^{x}u=0$

$xu''+u'=0$

$u'=\vartheta \Rightarrow u''=\vartheta'$

$x\vartheta'+\vartheta=0 \Rightarrow \ln\vartheta=-\ln x+\ln c \Rightarrow \vartheta=\frac{c}{x}$

$\Rightarrow u=c(\ln x+k)$

$\Rightarrow y=ce^{x}(\ln x+k)$

3) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=5,\ \lambda_2=-2$

$\lambda_1=5$ için , $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}k$; $\lambda_2=-2$ için $u_2=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}k$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$

$x(t)=c_1e^{5t}-3c_2e^{-2t}$, $y(t)=c_1e^{5t}+4c_2e^{-2t}$

4) $\left.\begin{array}{ll} (D+1)x-y=\cos t & /\ 4 \\ 4x+(D-3)y=0 & /\ -(D+1) \end{array}\right\}\ y''-2y'+y=-4\cos t$

$\Rightarrow y_h=(c_1+c_2t)e^{t}$, $y_p=a\cos t+b\sin t$, $a=0$ ve $b=2$

$y_p=2\sin t$

$y(t)=(c_1+c_2t)e^{t}+2\sin t$

2. denklemden , $x(t)=\frac{1}{4}(2c_1-c_2+2c_2t)e^{t}+\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t$

5) $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}=0$$

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}=0$$

$\Rightarrow a_2 = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n \right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{n}{(n+2)(n+1)} a_n \quad , \quad n \geq 1 \text{ için.}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{6} \, , \quad a_4 = -\frac{2a_2}{12} \, , \quad a_5 = -\frac{3a_3}{20} \, , \quad a_6 = -\frac{4a_4}{30} \, ,$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_1}{6} x^3 + \frac{a_1}{40} x^5 + \ldots$$

6) $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - 1 \quad \Rightarrow \mathcal{L}[t y'(t)] = (-1)(Y(s) + sY'(s))$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2 Y(s) - s - 2 \quad \Rightarrow \mathcal{L}[t y''(t)] = (-1)\left(2sY(s) + s^2 Y'(s) - 1\right)$$

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 + sY(s) - 1 + 2Y(s) + 2sY'(s) - 2Y(s) = 0$$

$$(-s^2 + 2s) Y'(s) - sY(s) = 0$$

$$Y'(s) + \frac{1}{s-2} Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{c}{s-2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s-2}\right] = c e^{2t}$$

$$y(0) = c e^{2 \cdot 0} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{e^{2t}}}$$