Adı ve Soyad:

Numara:

2017-2018 BAHAR YARIYILI MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ ENDUSTRİ MÜHENDİSLİĞİ MÜHENDİSLİK MATEMATİĞİ (Z.MAT 2018) BÜTÜNLEME SINAVI SORULARIDIR.
19.06.2018

1) $\left.\begin{array}{l} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0 \end{array}\right\}$ sisteminin sonsuz çözüme sahip olması için m ne olmalıdır? **(15 puan)**

2) $\left\{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right\} \subset M_{2\times2}$ vektör kümesi $M_{2\times2}$ vektör uzayında lineer bağımsız mıdır, gösteriniz. Burada $M_{2\times2}$, tüm 2×2 tipli matrislerin, matrislerdeki toplama ve reel sayı ile çarpma işlemlerine göre oluşturduğu vektör uzayıdır. **(15 puan)**

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bu öz değerlerden en büyüğüne karşılık gelen öz vektörü bulunuz. **(15 puan)**

4) $W = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - 3y - z = 0,\ x, y, z \in R\right\}$ kümesi R^3 ün alt uzayı mıdır? **(15 puan)**

5) $\{v_1 = (2,-2,1), v_2 = (1,-3,2), v_3 = (-7,5,4)\}$ kümesinin R^3 reel vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını araştırınız. **(20 puan)**

6) $T: R^2 \to R$, $\mathrm{T}(x,y) = e^{x+y}$ fonksiyonunun lineer dönüşüm olup olmadığını araştırınız. **(20 puan)**

Not: <u>Sınav süresi 90 dakikadır. İlk 30 dakika sınav salonunu terk etmek yasaktır.</u>

Z.MAT 2018 CEVAP ANAHTARI (19.06.2018)

1) $-m \quad -1$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1-m^2 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m-1 & 0 \\ 1-m & 0 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1-m)^3 \begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)^3 \begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+m & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+m & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^3(1+2+m)$$

$$= (m-1)^3(m+3)$$

$$(m-1)^3(m+3) = 0 \Rightarrow m = 1 \ \vee \ m = -3$$

2) $\lambda_1 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1$

$-3\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -3\lambda_1$

$2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow 4\lambda_1 - 12\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$8\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ Lineer bağımsızdır.

3) $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 4-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 3$

$\lambda_2 = 4$ için;

$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} -6x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{array}\right\} x_3 = 0 \end{array}\right\} x_2 = x_1$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$

4) i) $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \overset{?}{\in} W$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}$$ dir.

$$x_1+x_2-3(y_1+y_2)-(z_1+z_2) = \underbrace{x_1-3y_1-z_1}_{=0}+\underbrace{x_2-3y_2-z_2}_{=0}$$

$$=0$$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W$ için $\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \overset{?}{\in} W$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}, \quad \lambda x - 3(\lambda y) - \lambda z = \lambda(x-3y-z)$$
$$=\lambda . 0 = 0$$

5) i) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ olsun. Bu takdirde;

$$2\lambda_1 + \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0$$
$$-2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \quad \text{olur.}$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -15 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır. Bu çözüm; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ çözümüdür. Yani $\{v_1, v_2, v_3\}$ vektör kümesi lineer bağımsızdır.

iii) $\forall \vartheta = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ için $c_1\vartheta_1 + c_2\vartheta_2 + c_3\vartheta_3 \overset{?}{=} \vartheta$

$$\left.\begin{aligned} 2c_1 + c_2 - 7c_3 &= a \\ -2c_1 - 3c_2 + 5c_3 &= b \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= c \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -7 \\ b & -3 & 5 \\ c & 2 & 4 \end{vmatrix}}{-24} = \frac{22a + 18b + 16c}{24}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -7 \\ -2 & b & 5 \\ 1 & c & 4 \end{vmatrix}}{-24} = -\frac{13a + 15b + 4c}{24}$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & -3 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}}{-24} = \frac{a + 3b + 4c}{24}$$

i) ve ii) den $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanıdır.

6) i) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = e^{x_1+x_2+y_1+y_2}$$

$$T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) = e^{x_1+y_1} + e^{x_2+y_2}$$

$$\Rightarrow T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \neq T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$$

olduğundan T fonksiyonu lineer dönüşüm değildir.