

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
SINAV KAĞIDI

Sınav Tarihi :/...../.....

Öğrenci No :
Adı, Soyadı :
Bölümü/Programı :
Dersin Adı :
Dersin Sorumlusu :



Değerlendirme	
Rakam ile	Yazı ile

☐

☐ II. Öğretim

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ Z.MAT. 1008 MATEMATİK-II FİNAL SINAVI

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri için $A^{-1} + B^t A = ?$ (15 p.)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^t A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} + B^t A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin öz değer ve öz vektörlerini bulunuz (15 p.)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = 0$ için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\lambda_2 = 2$ için;

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. $f(x, y, z) = xe^{y-1} + z \ln y - x \cos z$ fonksiyonunun $P(0, 1, \frac{\pi}{2})$ noktasında $\vec{v} = (2, -2, 1) = \langle 2, -2, 1 \rangle$ vektörü yönündeki yönlü türevini hesaplayınız (15 P.).

$$\nabla f = (e^{y-1} - \cos z) \vec{i} + (xe^{y-1} + \frac{z}{y}) \vec{j} + (\ln y + x \sin z) \vec{k}$$

$$\nabla f|_P = \vec{i} + \frac{\pi}{2} \vec{j}$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{3} \vec{i} - \frac{2}{3} \vec{j} + \frac{1}{3} \vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla f|_P &= \vec{i} + \frac{\pi}{2} \vec{j} \\ \vec{U} &= \frac{2}{3} \vec{i} - \frac{2}{3} \vec{j} + \frac{1}{3} \vec{k} \end{aligned} \right\} (D_{\vec{U}} f)(P) = \nabla f|_P \cdot \vec{U} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{3}$$

4. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$ fonksiyonunun tüm kritik noktalarını bularak, sadece bir tanesinin yerel ekstremum noktası olup olmadığını araştırınız (20 p.).

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2$$

$$f_y(x, y) = -3y^2 - 2x = 0 \Rightarrow -3\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 - 2x = 0 \Rightarrow -x\left(\frac{27}{4}x^3 + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$$

$(0, 0)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ kritik noktalar.

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = -6y, \quad f_{xy} = -2$$

$$f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -4 < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot f_{yy}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - f_{xy}^2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 12 \\ \text{olduğundan } (0, 0) \text{ da yerel noktası vardır} \end{array} \right. \text{ ve } f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) < 0 \text{ olduğundan yerel maksimum var.}$$

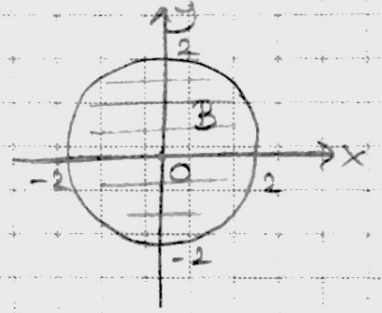
5. $x^2 + y^2 = 4$ silindiri, $z = 0$ ve $x + y + z = 4$ düzlemleri arasında kalan cismin hacmini katlı integral ile hesaplayınız (15 p.).

$$\iint_B \left[\int_{z=0}^{z=4-x-y} dz \right] dx dy = \iint_B (4 - x - y) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^2 \cos \theta - r^2 \sin \theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[8 - \frac{8}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \right] d\theta$$

$$= 8\theta - \frac{8}{3} (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} = 16\pi$$



6. C , $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ yarı çemberi ve $y = 0, -1 \leq x \leq 1$ doğru parçası ile pozitif yönde yönlendirilmiş kapalı bir eğri olmak üzere;

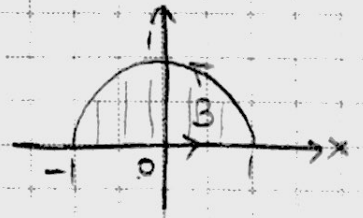
$$\oint_C (y^2 + 2x) dx + (x^2 - 3y) dy = ? \quad (20 p.)$$

$$\oint_C (y^2 + 2x) dx + (x^2 - 3y) dy = \iint_B (2y - 2x) dx dy$$

$$= 2 \iint_B (y - x) dx dy = 2 \int_0^\pi \int_0^1 (r \sin \theta - r \cos \theta) r dr d\theta$$

$$= 2 \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} (\sin \theta - \cos \theta) \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{2}{3} \int_0^\pi (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = \frac{2}{3} (-\cos \theta - \sin \theta) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{3} (1 + 1) = \frac{4}{3}$$



Not : Snavın ilk 30 dakikasında sınavdan çıkmak yasaktır. Sınav süresi 90 dakikadır.