

Matematik-II (Arasnav)

Ad Soyad:
Öğrenci Numarası:

16.04.24 13:00
Süre: 90 dk
Başarılar

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. (15 p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(x-2)^n}{10^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{10^n} \quad \checkmark 5p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-2|^n}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|}{10}$$

$$|x-2| < 10$$

$$-10 < x-2 < 10$$

$$-8 < x < 12 \quad \checkmark 5p$$

$$x = -8 \text{ için}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rightarrow \text{ıraksak}$$

$$x = 12 \text{ için}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \rightarrow \text{ıraksak}$$

$$\text{Yakınsaklık Aralığı: } (-8, 12) \quad \checkmark 5p$$

2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında ürettiği Taylor Serisini bulunuz. (10p)

$$-f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$-f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$-f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

$$-f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$-f'(0) = -1$$

$$-f''(0) = -2!$$

$$-f'''(0) = -3!$$

$$\dots$$

$$-f^{(n)}(0) = -(n!) \quad \checkmark 5p$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n!)}{n!} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \checkmark 5p$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot n!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. (10p)

$$a_n = \frac{3^n}{n \cdot n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2 n!} \cdot \frac{n \cdot n!}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n+1)^2} = 0 < 1 \quad \checkmark 5p$$

$$\text{olduğundan } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot n!} \text{ serisi yakınsak. } \checkmark 5p$$

4. (a) $A(1, 1, -1)$ noktasından geçen ve $\vec{v} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ vektörüne dik olan D_1 düzleminin denklemini bulunuz. (10p)

$$x + 3y - z + D = 0 \quad \checkmark 5p$$

$$1 + 3(1) - (-1) + D = 0$$

$$D = -5$$

$$x + 3y - z - 5 = 0$$

$$\checkmark 5p$$

- (b) $x = 3 + t, y = -3 + 3t, z = -t$ doğrusunun D_1 düzlemini kestiği noktayı bulunuz. (10p)

$$3+t + 3(-3+3t) - (-t) - 5 = 0 \quad \checkmark 5p$$

$$11t = 11$$

$$t = 1$$

$$K(4, 0, -1) \quad \checkmark 5p$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz (10p) ve (varsa) A matrisinin tersini bulunuz. (10p)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1 \neq 0 \text{ olduğundan } A^{-1} \text{ vardır.}$$

✓ 10p

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 11 & 4 & -4 \\ -9 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = (-1) \begin{bmatrix} 11 & -9 & -3 \\ 4 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 9 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ 5p

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerini bulunuz. (10p)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

✓ 5p

$\lambda_1 = -1$ için;

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$ için;

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

✓ 5p

7. $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 5x + 11y - 21z = -22 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümünü matrisler yardımıyla araştırınız. (15p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 5 & 11 & -21 & -22 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-5R_1 \\ -3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{bmatrix} \xrightarrow{+8R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}R_3}$$

✓ 5p

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

✓ 5p

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2, y = -1, z = -1$$

✓ 5p