

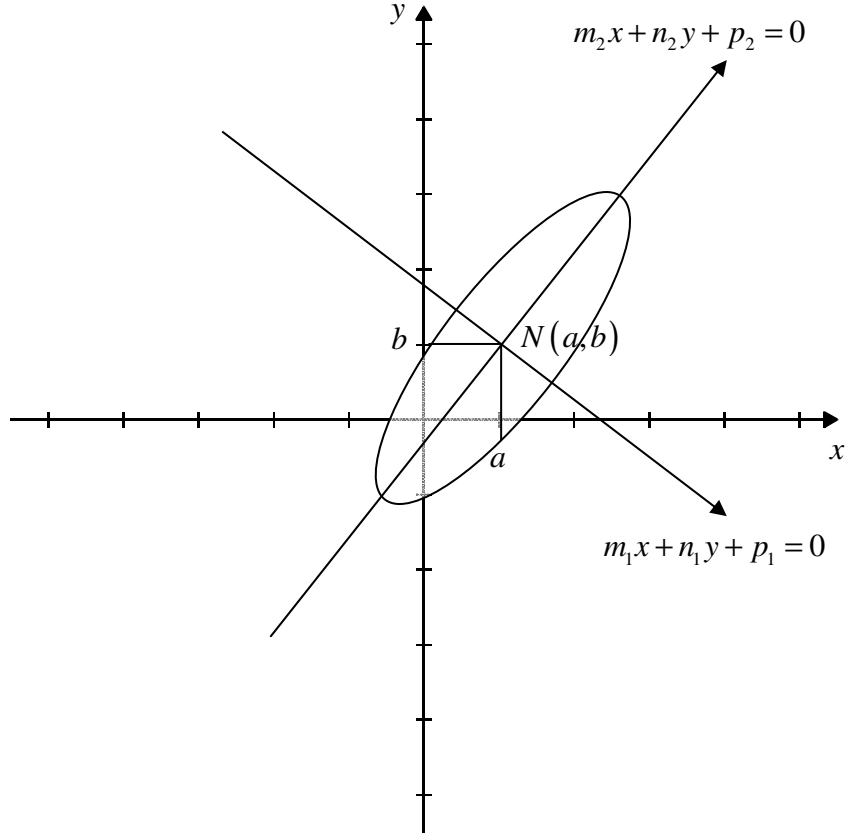
## YAN ŞARTLI EKSTREMUMLAR İLE KONİK KESİTLERİN İRDELENMESİ (HASAN KELEŞ YÖNTEMİ)

Bu yöntem; döndürülmüş ve ötelenmiş konik kesitlerinin, yan şartlı ekstremumlar kullanılarak farklı bir şekilde çalışmayı içermektedir. Daha önce, bilinen sadece orijinde döndürülmüş konik kesitleri yöntemi, bundan böyle ötelenmiş bir noktada da döndürülmesi durumunda da çizilebileceğini göstermektedir.

$A, B, C, k \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = k$$

döndürülmüş konik kesiti;



$\left. \begin{array}{l} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{array} \right\}$  ötelemesine tabi tutulur ise

$$A(x_1 + a)^2 + B(x_1 + a)(y_1 + b) + C(y_1 + b)^2 = k$$

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + (2Aa + Bb)x_1 + (2Cb + Ba)y_1 + Aa^2 + Bab + Cb^2 - k = 0 \dots (1)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \dots (2)$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} D = 2Aa + Bb \\ E = 2Cb + Ba \\ F = Aa^2 + Bab + Cb^2 - k \end{cases}$$

denklemleri yardımıyla  $N(a, b)$  ötelemesi bulunur. Orijindeki esas eksenler

$$y = p_1x$$

$$y = p_2x$$

ve

$$\left. \begin{array}{l} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{array} \right\}$$

öteleme sonucu esas eksenler

$$y + b = p_1(x + a)$$

$$y + b = p_2(x + a)$$

şeklindedir.

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - a)^2$$

şartı altındaki denklemleri kullanılır ise;

$$\left. \begin{array}{l} 2Ax + By + D = 2(x + a)\lambda \\ 2Cy + Bx + E = 2(y + b)\lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (y + b)/2Ax + By + D - 2a\lambda = 2\lambda(x + a) \\ (x + a)/2Cy + Bx + E - 2b\lambda = 2\lambda(y + b) \end{array} \right\}$$

$$(m_1x + n_1y + p_1)(m_2x + n_2y + p_2) = 0$$

döndürülmüş ve ötelenmiş esas eksenleri elde edilir. Esas eksenler ve katsayılar arasında;

$$m_1m_2x^2 + (n_1m_2 + m_1n_2)xy + n_1n_2y^2 + (m_1p_2 + m_2p_1)x + (n_1p_2 + n_2p_1)y + p_1p_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1m_2 = -B \\ n_1m_2 + n_2m_1 = 2A - 2C \\ n_1n_2 = B \\ m_1p_2 + m_2p_1 = Ba - 2Ab - E \\ n_1p_2 + n_2p_1 = 2Ca - Bb + D \\ p_1p_2 = Ea - Db \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \\ \frac{n_1m_2 + n_2m_1}{2} = A - C \end{array} \right.$$

ilişkisi elde edildi.

İspatsız olarak ilk kez aşağıdaki teorem verildi.

**Teorem (Hasan KELEŞ, 2014).**  $A, B, C, D, E, F, a, b \in \mathbb{R}$  için  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  konik kesiti  $N(a, b)$  noktasında döndürülmüş ise bu taktirde konik kesitinin katsayıları ile dönme noktasının koordinatları arasında;

$$D = 2Aa + Bb$$

$$E = 2Cb + Ba$$

şeklinde denklemleri vardır.

**Örnek .**  $x^2 + 3xy + 3y^2 + x - y - 6 = 0 \dots (*)$  ötelenmiş ve döndürülmüş konik kesiti;

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3b = 1 \\ 3b + 2a = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 6a - 9b = -3 \\ +6a + 4b = -2 \\ \hline -5b = -5 \Leftrightarrow b = 1, a = -1 \end{array}$$

Dolayısıyla;  $(0,0) \xrightarrow[y \rightarrow y+1]{x \rightarrow x-1} (1,-1)$  ötelemesi yapıldı. Standart uzaklık fonksiyonu ise

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (y+1)/2x + 3y+1 &= 2\lambda(x-1) \\ (x-1)/2y + 3x-1 &= 2\lambda(y+1) \end{aligned} \right\} \\ & \Leftrightarrow (y+1)^2 - (x-1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \underbrace{[(y+1)+(x-1)]}_{y=-x} \underbrace{[(y+1)-(x-1)]}_{y=x-2} = 0 \end{aligned}$$

esas eksenleri elde edilir.  $y = x - 2$  eşitliği (\*) denkleminde kullanılırsa;

$$5x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3, y = -2$$

