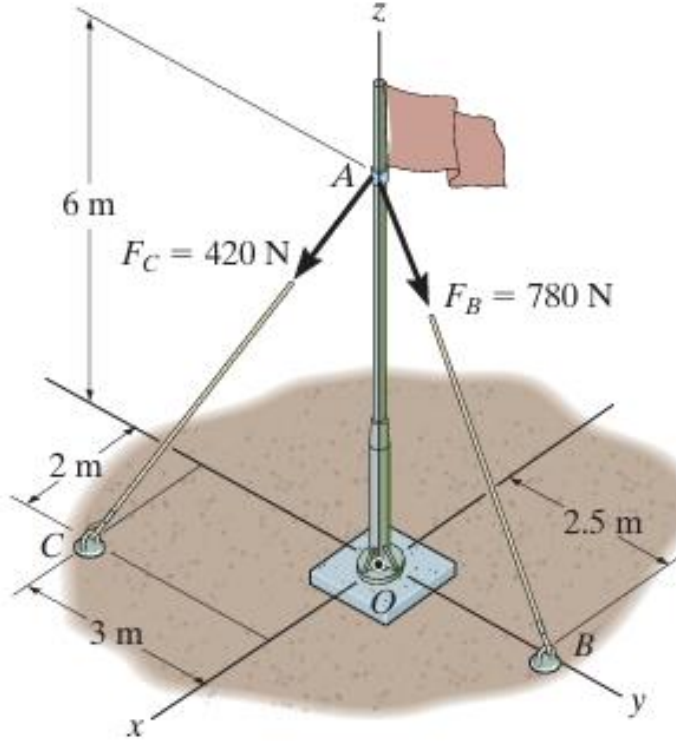
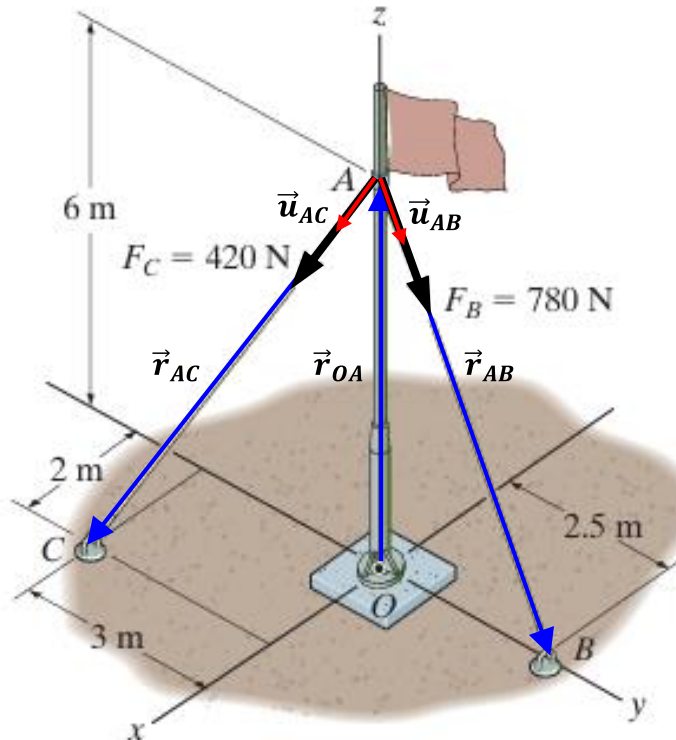


Statik Ödev 4 Çözümleri (29 Mart 2024)

Soru 1: Şekilde gösterilen bayrak direğinin A noktasına etki eden $\vec{F}_B$ ve $\vec{F}_C$ kuvvetlerinin O noktası etrafında ürettikleri bileşke momenti kartezyen vektörlerle ifade ederek büyüklüğünü ve doğrultusunu belirleyiniz.



Çözüm: Bayrak direğine etki eden kuvvetlerin doğrultuları ve o noktasına göre konumlarını gösteren serbest cisim diyagramı (SCD) çizilerek analize başlanır.



A noktasının konum koordinatları: A (0, 0, 6 m)

B noktasının konum koordinatları: B (0, 2.5 m, 0)

C noktasının konum koordinatları: C (2 m, -3 m, 0)

O noktasının konum koordinatları: O (0, 0, 0)

A noktasına göre B noktasının konum vektörü:

$$\vec{r}_{AB} = [(0 - 0)\vec{i} + (2.5 - 0)\vec{j} + (0 - 6)\vec{k}] = \{2.5\vec{j} - 6\vec{k}\} \text{ m}$$

A noktasına göre C noktasının konum vektörü:

$$\vec{r}_{AC} = [(2 - 0)\vec{i} + (-3 - 0)\vec{j} + (0 - 6)\vec{k}] = \{2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}\} \text{ m}$$

O noktasına göre A noktasının konum vektörü:

$$\vec{r}_{OA} = [(0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (6 - 0)\vec{k}] = \{6\vec{k}\} \text{ m}$$

OA doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{6\vec{k}}{\sqrt{(6)^2}} = \vec{k}$$

AB doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{2.5\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{(2.5)^2 + (-6)^2}} = \frac{5}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}$$

AC doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}$$

$\vec{F}_B$ kuvvetinin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{F}_B = F_B \vec{u}_{AB} = 780 \left(\frac{5}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k} \right) = \{300\vec{j} - 720\vec{k}\} \text{ N}$$

$\vec{F}_C$ kuvvetinin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{F}_C = F_C \vec{u}_{AC} = 420 \left(\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k} \right) = \{120\vec{i} - 180\vec{j} - 360\vec{k}\} \text{ N}$$

$\vec{F}_B$ ve $\vec{F}_C$ kuvvetlerinin O noktası etrafında ürettikleri bileşke momentin belirlenmesi:

$$\vec{M}_{RO} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_C = \vec{r}_{OA} \times (\vec{F}_B + \vec{F}_C) = (6\vec{k}) \times (300\vec{j} - 720\vec{k} + 120\vec{i} - 180\vec{j} - 360\vec{k})$$

$$\vec{M}_{RO} = (6\vec{k}) \times (120\vec{i} + 120\vec{j} - 1080\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ 120 & 120 & -1080 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_{RO} = [0(-1080) - 6(120)]\vec{i} - [0(-1080) - 6(120)]\vec{j} + [0(120) - 0(120)]\vec{k} = \{-720\vec{i} + 720\vec{j}\} \text{ N.m}$$

O noktası etrafında üretilen $\vec{M}_{RO}$ bileşke momentinin büyüklüğünün belirlenmesi:

$$M_{RO} = \sqrt{(M_{RO})_x^2 + (M_{RO})_y^2 + (M_{RO})_z^2} = \sqrt{(-720)^2 + (720)^2 + (0)^2} = \mathbf{1018.234 \text{ N.m}}$$

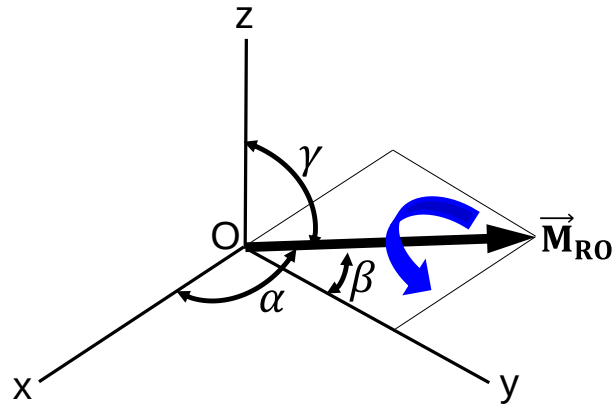
$\vec{M}_{RO}$ bileşke momentinin kartezyen koordinatlara göre doğrultusunun belirlenmesi:

$$\vec{u}_{M_{RO}} = \frac{\vec{M}_{RO}}{M_{RO}} = \underbrace{(-0.707)}_{\cos\alpha}\vec{i} + \underbrace{(0.707)}_{\cos\beta}\vec{j} + \underbrace{(0)}_{\cos\gamma}\vec{k}$$

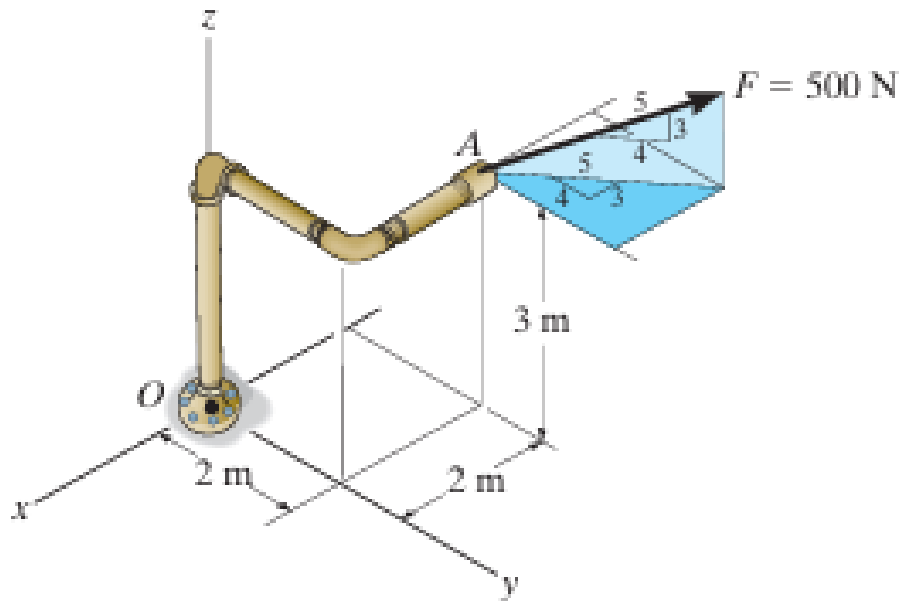
$$\alpha = \cos^{-1}(-0.707) = \mathbf{135^\circ}$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.707) = \mathbf{45^\circ}$$

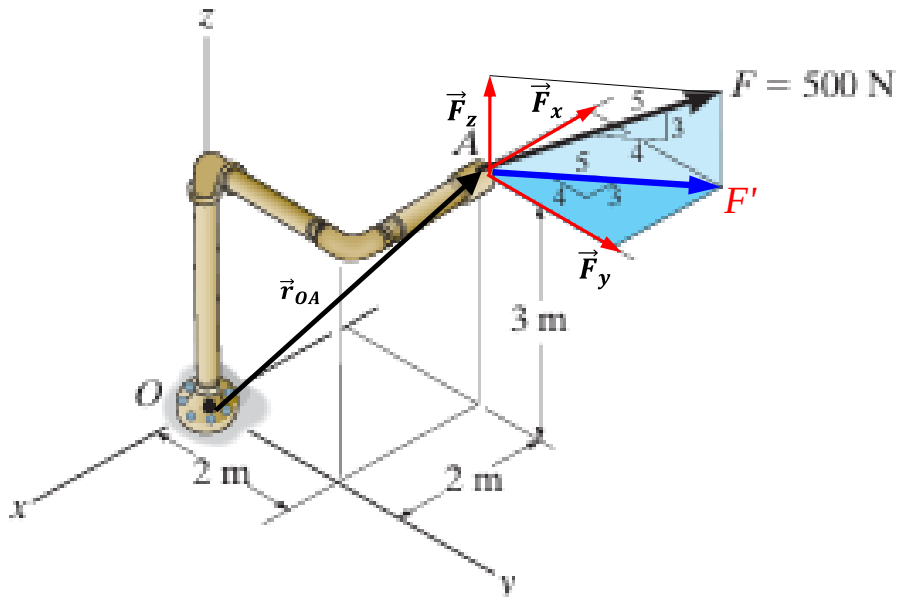
$$\gamma = \cos^{-1}(0) = \mathbf{90^\circ}$$



Soru 2: Şekilde gösterilen boru sisteminin ucuna etki eden $\vec{F}$ kuvvetinin o noktası etrafında ürettiği momenti kartezyen vektörlerle ifade ederek büyüklüğünü ve doğrultusunu belirleyiniz.



Çözüm: $\vec{F}$ kuvvetinin kartezyen koordinatlara göre bileşenleri ve o noktasına göre konum vektörünü göstermek için serbest cisim diyagramı çizilerek analize başlanır.



$\vec{F}$ kuvvetinin kartezyen koordinatlara göre vektörel olarak belirlenmesi:

$$F' = F \left(\frac{4}{5} \right) = 500 \left(\frac{4}{5} \right) N = \mathbf{400\ N}$$

$$F_x = -F' \left(\frac{3}{5} \right) = -400 \left(\frac{3}{5} \right) N = \mathbf{-240\ N}$$

$$F_y = F' \left(\frac{4}{5} \right) = 400 \left(\frac{4}{5} \right) N = \mathbf{320\ N}$$

$$F_z = F \left(\frac{3}{5} \right) = 500 \left(\frac{3}{5} \right) N = \mathbf{300\ N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \{-240 \vec{i} + 320 \vec{j} + 300 \vec{k}\} N$$

O noktasına göre A noktasının konum vektörü:

$$\vec{r}_{OA} = [(-2 - 0)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (3 - 0)\vec{k}] = \{-2 \vec{i} + 2 \vec{j} + 3 \vec{k}\} m$$

$\vec{F}$ kuvvetinin O noktası etrafında ürettiği momentin belirlenmesi:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = (-2 \vec{i} + 2 \vec{j} + 3 \vec{k}) \times (-240 \vec{i} + 320 \vec{j} + 300 \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ -240 & 320 & 300 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = [2(300) - 3(320)]\vec{i} - [-2(300) - 3(-240)]\vec{j} + [-2(320) - 2(-240)]\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \{-360 \vec{i} - 120 \vec{j} - 160 \vec{k}\} N.m$$

O noktası etrafında üretilen $\vec{M}_O$ momentinin büyüklüğünün belirlenmesi:

$$M_O = \sqrt{(M_O)_x^2 + (M_O)_y^2 + (M_O)_z^2} = \sqrt{(-360)^2 + (-120)^2 + (-160)^2} = \mathbf{411.825\ N.m}$$

$\vec{M}_{RO}$ bileşke momentinin kartezyen koordinatlara göre doğrultusunun belirlenmesi:

$$\vec{u}_{M_O} = \frac{\vec{M}_O}{M_O} = \underbrace{(-0.874)}_{\cos\alpha} \vec{i} + \underbrace{(-0.291)}_{\cos\beta} \vec{j} + \underbrace{(-0.389)}_{\cos\gamma} \vec{k}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0.874) = \mathbf{150.927^\circ}$$

$$\beta = \cos^{-1}(-0.291) = \mathbf{106.918^\circ}$$

$$\gamma = \cos^{-1}(-0.389) = \mathbf{112.892^\circ}$$

