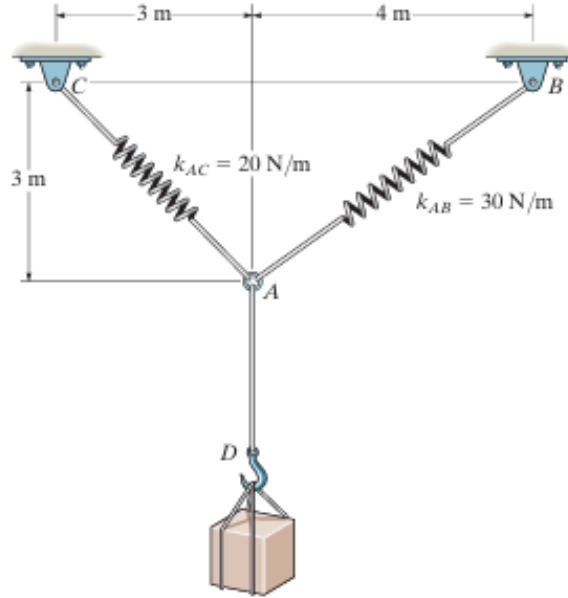


Statik Ödev 3 Çözümleri (22 Mart 2024)

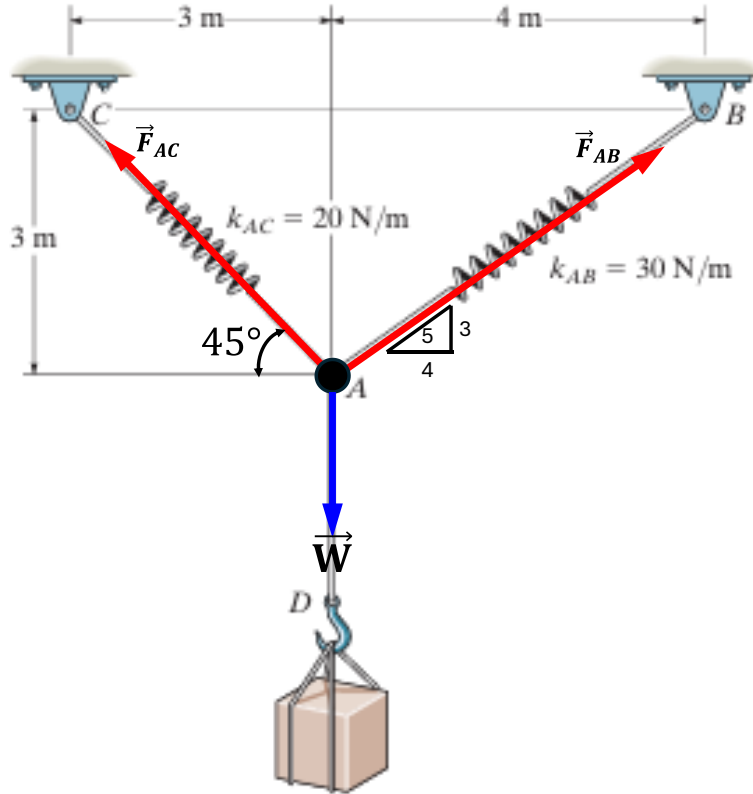
Soru 1: Şekilde gösterilen sistemde AB yayının uzamamış haldeki uzunluğu 3 m' dir. AD ipinin ucuna şekilde görüldüğü gibi blok asılı iken sistem dengede olduğuna göre;

- AD ipi, AB ve AC yaylarında oluşan kuvvetleri gösteren serbest çizim diyagramını çizerek sistemin denge denklemini kartezyen vektörlerle ifade ediniz.
- AB ve AC yaylarındaki uzamaları hesaplayarak AD ipine asılı olan blok' un kütesini belirleyiniz.



Çözüm

- Serbest cisim diyagramının çizilmesi:



A noktasındaki denge durumunun *kartezyen vektörler ile gösterimi*:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{W} = 0 \\ \vec{F}_{AB} &= F_{AB} \left(\frac{4}{5}\right) \vec{i} + F_{AB} \left(\frac{3}{5}\right) \vec{j} \\ \vec{F}_{AC} &= -F_{AC}(\cos 45^\circ) \vec{i} + F_{AC}(\sin 45^\circ) \vec{j} \\ \vec{W} &= -W \vec{j} \\ \sum \vec{F} &= \left[\underbrace{F_{AB} \left(\frac{4}{5}\right) - F_{AC}(\cos 45^\circ)}_{\Sigma F_x} \right] \vec{i} + \left[\underbrace{F_{AB} \left(\frac{3}{5}\right) + F_{AC}(\sin 45^\circ) - W}_{\Sigma F_y} \right] \vec{j} = 0 \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

b) Denge denklemlerinin skaler olarak yazılması:

$$\rightarrow \sum F_x = F_{AB} \left(\frac{4}{5}\right) - F_{AC}(\cos 45^\circ) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\uparrow \sum F_y = F_{AB} \left(\frac{3}{5}\right) - F_{AC}(\sin 45^\circ) - W = 0 \dots \dots \dots (3)$$

AB yayının uzamamış haldeki uzunluğu, $L_0 = 3 \text{ m}$ olarak soruda verilmiştir. Ağırlık asıldıktan sonra denge durumunda AB yayının uzunluğu $L = 5 \text{ m}$ ' ye kadar uzamıştır ($L = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$). Bu durumda AB yayının uzama miktarı, $s_{AB} = L - L_0 = 5 \text{ m} - 3 \text{ m} = 2 \text{ m}$ olarak hesaplanır. AB yayı 2 m uzadığında yay üzerinde oluşan kuvvet,

$$F_{AB} = k_{AB} s_{AB} = 30 \frac{N}{m} 2 \text{ m} = 60 \text{ N}$$

$F_{AB} = 60 \text{ N}$ 'luk kuvvet büyüklüğü (2) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$F_{AC} = (\sqrt{2}) F_{AB} \left(\frac{4}{5}\right) = (\sqrt{2}) 60 \left(\frac{4}{5}\right) \text{ N} = 67.882 \text{ N}$$

Bu durumda AC yayının uzama miktarı,

$$s_{AC} = \frac{F_{AC}}{k_{AC}} = \frac{67.882 \text{ N}}{20 \frac{N}{m}} = 3.394 \text{ m}$$

(3) nolu denklemde F_{AB} ve F_{AC} yerine yazılırsa,

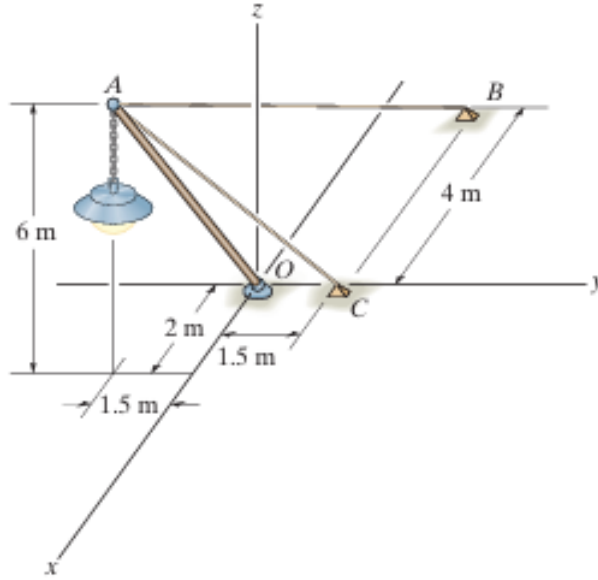
$$W = F_{AB} \left(\frac{3}{5}\right) - F_{AC}(\sin 45^\circ) = 60 \left(\frac{3}{5}\right) \text{ N} - 67.882(\sin 45^\circ) \text{ N} = 84 \text{ N}$$

AD ipine asılı olan blok' un kütlesi:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{84 \text{ N}}{9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}} = 8.563 \text{ kg}$$

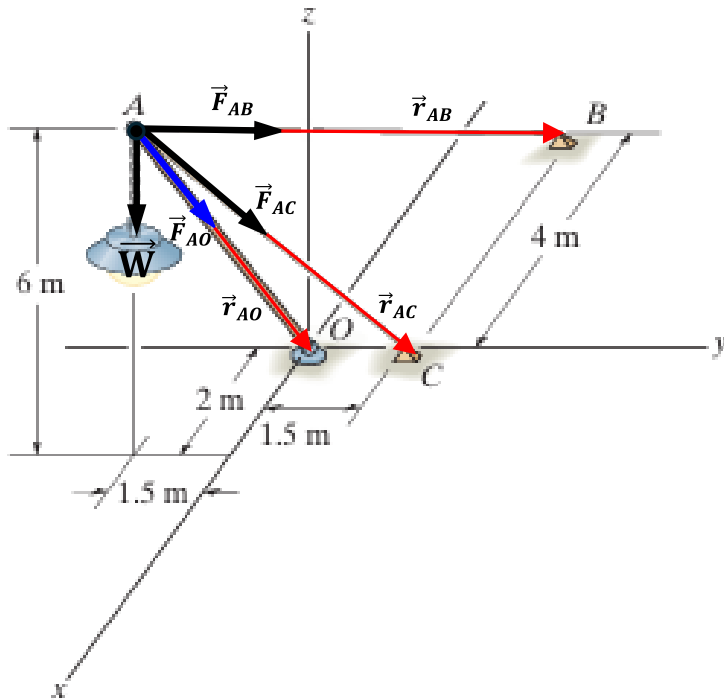
Soru 2: 15 kg'lık bir kütleye sahip bir lamba şekilde görüldüğü gibi AO doğrultusunda konumlandırılmış, AB ve AC kabloları tarafından desteklenmiş bir direğe bağlıdır. Sistem dengede iken direktteki kuvvetin kendi doğrultusunda olması durumu için;

- Sistemin serbest çizim diyagramını çizerek AO direği, AB ve AC kablolarındaki kuvvetleri kartezyen vektörlerle gösteriniz.
- Sistemin denge denklemlerini kartezyen ve skaler formda göstererek AO direği, AB ve AC kablolarındaki kuvvetlerin büyüklüklerini hesaplayınız.



Çözüm

- Serbest cisim diyagramının çizilmesi:



A noktasının konum koordinatları: A (2 m, -1.5 m, 6 m)

B noktasının konum koordinatları: B (-4 m, 1.5 m, 0)

C noktasının konum koordinatları: C (0, 1.5 m, 0)

O noktasının konum koordinatları: O (0, 0, 0)

AB doğrultusundaki B noktasının A noktasına göre konum vektörü:

$$\vec{r}_{AB} = [(-4 - 2)\vec{i} + (1.5 - (-1.5))\vec{j} + (0 - 6)\vec{k}] = \{-6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\} m$$

AC doğrultusundaki C noktasının A noktasına göre konum vektörü:

$$\vec{r}_{AC} = [(0 - 2)\vec{i} + (1.5 - (-1.5))\vec{j} + (0 - 6)\vec{k}] = \{-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\} m$$

AO doğrultusundaki O noktasının A noktasına göre konum vektörü:

$$\vec{r}_{AO} = [(0 - 2)\vec{i} + (0 - (-1.5))\vec{j} + (0 - 6)\vec{k}] = \{-2\vec{i} + 1.5\vec{j} - 6\vec{k}\} m$$

AB doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{(-6)^2 + (3)^2 + (-6)^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

AC doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-6)^2}} = -\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}$$

AO doğrultusunun birim vektörü:

$$\vec{u}_{AO} = \frac{\vec{r}_{AO}}{r_{AO}} = \frac{-2\vec{i} + 1.5\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (1.5)^2 + (-6)^2}} = -\frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}$$

$\vec{F}_{AB}$ kuvvetinin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB}\vec{u}_{AB} = F_{AB}\left(-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

$\vec{F}_{AC}$ kuvvetinin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC}\vec{u}_{AC} = F_{AC}\left(-\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}\right)$$

$\vec{F}_{AO}$ kuvvetinin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{F}_{AO} = F_{AO}\vec{u}_{AO} = F_{AO}\left(-\frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}\right)$$

Lamba ağırlığının kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\vec{W} = -W\vec{k} = -mg\vec{k} = -\left(15 \text{ kg } 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\vec{k} = \{-147.15\vec{k}\} N$$

b) Sistemdeki denge durumunun vektörel olarak ifade edilişi:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AO} + \vec{W} = 0$$

Sistemin denge denkleminin kartezyen vektörler ile gösterimi:

$$\sum \vec{F} = \left[-\frac{2}{3}F_{AB} - \frac{2}{7}F_{AC} - \frac{4}{13}F_{AO} \right] \vec{i} + \left[\frac{1}{3}F_{AB} + \frac{3}{7}F_{AC} + \frac{3}{13}F_{AO} \right] \vec{j} + \left[-\frac{2}{3}F_{AB} - \frac{6}{7}F_{AC} - \frac{12}{13}F_{AO} - 147.15 \right] \vec{k} = 0$$

ΣF_x ΣF_y ΣF_z

Sistemin denge denklemlerinin skaler olarak gösterimi:

$$+\sum F_x = -\frac{2}{3}F_{AB} - \frac{2}{7}F_{AC} - \frac{4}{13}F_{AO} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$+\sum F_y = \frac{1}{3}F_{AB} + \frac{3}{7}F_{AC} + \frac{3}{13}F_{AO} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$+\sum F_z = -\frac{2}{3}F_{AB} - \frac{6}{7}F_{AC} - \frac{12}{13}F_{AO} - 147.15 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Yok etme metodu ile denklemlerdeki bilinmeyenlerin elde edilmesi:

(2) nolu denklem 2 ile çarpıldıktan sonra elde edilen yeni denklem ile (1) nolu denklem toplanır,

$$1 \left(-\frac{2}{3} F_{AB} - \frac{2}{7} F_{AC} - \frac{4}{13} F_{AO} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} F_{AB} + \frac{3}{7} F_{AC} + \frac{3}{13} F_{AO} \right) = \frac{4}{7} F_{AC} + \frac{2}{13} F_{AO} = 0 \dots (4)$$

(1) nolu denklem 3 ile (2) nolu denklem 4 ile çarpıldıktan sonra elde edilen yeni denklemler birbirleri ile toplanır,

$$3 \left(-\frac{2}{3} F_{AB} - \frac{2}{7} F_{AC} - \frac{4}{13} F_{AO} \right) + 4 \left(\frac{1}{3} F_{AB} + \frac{3}{7} F_{AC} + \frac{3}{13} F_{AO} \right) = -\frac{2}{3} F_{AB} + \frac{6}{7} F_{AC} = 0 \dots (5)$$

(4) nolu denklem yeniden düzenlenirse,

$$F_{AO} = -\frac{26}{7} F_{AC} \dots \dots \dots (6)$$

(5) nolu denklem yeniden düzenlenirse,

$$F_{AB} = \frac{9}{7} F_{AC} \dots \dots \dots (7)$$

F_{AO} ve F_{AB} terimleri (3) nolu denklemde F_{AC} tipinde yazılırsa,

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{9}{7} F_{AC} \right) - \frac{6}{7} F_{AC} - \frac{12}{13} \left(-\frac{26}{7} F_{AC} \right) - 147.15 = \frac{12}{7} F_{AC} - 147.15 = 0 \dots \dots (8)$$

$$F_{AC} = \mathbf{85.838 \text{ N}}$$

(7) nolu eşitlikte F_{AC} 'nin değeri yerine yazılırsa,

$$F_{AB} = \mathbf{110.363 \text{ N}}$$

(6) nolu eşitlikte F_{AC} 'nin değeri yerine yazılırsa,

$$F_{AO} = -318.827 \text{ N} = \mathbf{318.827 \text{ N}} \text{ (} F_{AO} \text{ kuvvetinin doğrultusu SCD' de tersi yön)}$$

