

Diziler: (Reel Sayı Dizileri)

Tanım: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olan fonksiyona bir reel sayı dizisi (kısaca dizi) denir.

$$1 \text{ için } f(1) = a_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1. \text{ terim}$$

$$2 \text{ için } f(2) = a_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 2. \text{ terim}$$

$$3 \text{ için } f(3) = a_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow 3. \text{ terim}$$

$$\vdots$$
$$n \text{ için } f(n) = a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow n. \text{ terim (genel terim)}$$

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \text{ şeklinde bir dizinin}$$

bütün terimleri sırasıyla küme parantezi içerisinde yazılarak da gösterilebilir. Kısaca açısında doğru olan $\{a_n\}$ ((a_n)) şeklinde dizinin genel terimi küme parantezi içerisinde yazılarak da gösterilebilir.

Örnek: $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$$

$$\{2\} = \{2, 2, 2, \dots, 2, \dots\} \quad \text{sabit dizi}$$

$$\{1, 0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots\}$$

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{b^1} \Rightarrow \{a_n\} \text{ dizisi}$$

$$\left\{ 3, \frac{6}{b^1}, \frac{12}{b^{1^2}}, \frac{24}{b^{1^3}}, \dots, \frac{2a_{n-1}}{b^1}, \dots \right\} \text{ şeklinde dir.}$$

$$\left\{ \frac{\sin(n+1)^2}{n! 2^n} \right\} = \left\{ \frac{\sin 4}{2}, \frac{\sin 9}{8}, \frac{\sin 16}{48}, \dots, \frac{\sin(n+1)^2}{n! 2^n}, \dots \right\}$$

Tanım: $\{a_n\}$ bir dizi, $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{sayı}$$

$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \\ \pm\infty \end{matrix}$

$\begin{matrix} a \pm \\ \pm\infty \end{matrix}$

limit yok.

Eğer her $r > 0$ için $(a-r, a+r)$ aralığının dışında dizinin en fazla sonlu terimi kalıyorsa $\{a_n\}$ dizisi a sayısına yakınsıyor denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ile gösterilir.

Aksi durumda dizi yakınsaklır denir.

Örnekler:

1) $\{0\}$ dizisi yakınsaklır.

Her $r > 0$ için $(0-r, 0+r) = (-r, r)$ aralığı

$$\{0\} = \{0, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

bu dizinin bütün terimlerini içerir, $(-r, r)$ dışında 0 terim kalır.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ yakınsaklır.}$$

2) $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ yakınsaklır?

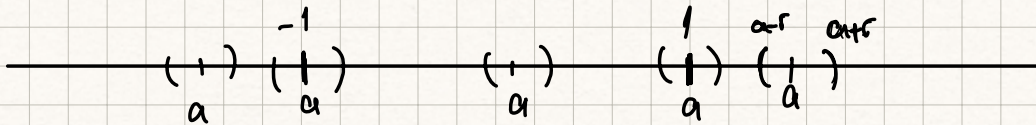
Varsayalımki bir a sayısına yakınsak olsun. $\frac{1}{3} > 0$ için $(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$ aralığı dizinin sonsuz terimini içermeli ve dışarıda sonlu terim kalmalı.

Uzunluğu $\frac{2}{3}$ birim olan $(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$ aralığının sonsuz tane doğal sayı içermeli.

Bu varsayım mümkün değil. $\{n\}$ ıraksaktır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ ıraksaktır.

3) $\{(-1)^n\}$ dizisi yakınsak mıdır.



$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{limit yok.}$ ıraksaktır.

Not: Bir dizi tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ limiti hesaplanırken kullanılan bütün yöntemler dizinin limitini hesaplanırken kullanılabilir.

4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n}{8n^2 - 3n + 1} = \frac{3}{8}$$