

8) Alterne Seriler için Leibnitz Testi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ şeklinde tanımlanan seriye alterne seri denir.

Leibnitz Testi: Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$ ve $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ise $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ yakınsak mıdır?

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ve $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ yakınsaktır. $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ ıraklaşır } p\text{-Testi} \right)$

9) Mutlak Yakınsaklık Testi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisi için $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

serisine mutlak yakınsak seri denir.

M.Y. Testi: Mutlak yakınsak seriler yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ p-testi yakınsak.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ mutlak yakınsaktır. $\Rightarrow$ M.Y.T. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ yakınsak.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ p-testi ıraklaşır.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ mutlak yakınsak değildir. (Leibnitz testinden) yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+3} \right) \text{ için } \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+3} \right) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n+3} \quad \text{G.T.T. iraksalı.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)$ Mutlak yakınsaklı değilim.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+3} = \text{limit yok} \neq 0$ yine G.T.T. iraksalı.

Alıştırmalar:

Aşağıdaki seriler yakınsak mıdır?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n 2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{8^n n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{7^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \pi\right)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n\pi) \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$$