

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$$

Kök T. yakınsaktır.

7. Karşılaştırma Testi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ serileri her $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0, b_n > 0$

ve sonlu terim hariç $a_n \leq b_n$ olsun.

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ıraksaktır.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^2+2n+3} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n^2}$ olup

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad p\text{-Testinden yakınsak}$$

$\Rightarrow$ Karşılaştırma T. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ırak.}$$

$n \geq 3$ için

$$\frac{\ln n}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad p\text{-Testi uygulanır}$$

$$\text{Karşılaştırma T.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n+1} \text{ ıraksaktır.}$$

Örnek:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad p\text{-Testi uygulanır.}$$

$$\text{Karşılaştırma testiyle} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ ıraksaktır.}$$

8) Leibniz Testi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

alterne seri dir.

Leibniz T: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ için. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$

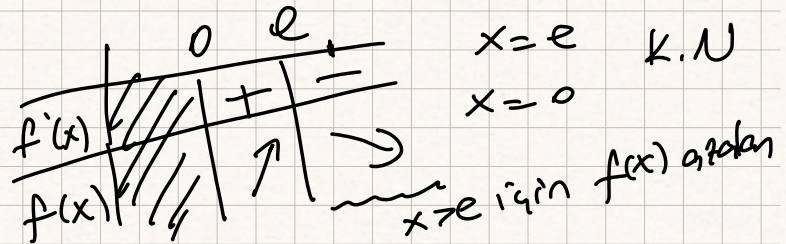
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \text{ise} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ yakınsaktır.}$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

Her $n \in \mathbb{N}$ $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
Leibniz Testinden yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \stackrel{0}{=} 0$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ için $\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$



0 halinde Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ için

$$0 < \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

Leibniz Testinden $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ yakınsaktır.

9) Mutlak Yakınsaklık Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak
ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'ye mutlak yakınsak seri denir.

M.Y.T: Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{1}{n^2}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ p-testi yakınsak.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ mutlak yakınsaktır.

M.Y.T. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ yakınsaktır.

Araştırmalar:

Aşağıdaki seriler yakınsak mıdır?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n 2^n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{8^n n!}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{7^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \pi\right)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n\pi) \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$$