

Seriler için Yakınsaklılık Testleri:

1. Integral Testi: $\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi, $f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli ve azalan bir fonksiyon olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = a_n$ olmalı öteye $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ kriteri ile $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ kriteri aynıdır.

Örneği: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ kriteri?

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{e^{n^2}} > 0$ 'dır. $\Rightarrow \left\{ \frac{n}{e^{n^2}} \right\}$ pozitif terimlidir.

$f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ sürekli ve azalandır. Ayrıca

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = \frac{n}{e^{n^2}}$ 'dır.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{x}{e^{x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^t \right)$$

+tip

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} e^{-1} \right) = 0 + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx \text{ yakınsaklı.}$$

$\Rightarrow$ Integral testinden $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ yakınsaktır.

$$\int \frac{x}{e^{x^2}} dx = \int x e^{-x^2} dx = \int e^k \frac{1}{-2} dk = -\frac{1}{2} \int e^k dk$$

$$\begin{aligned} -x^2 &= k \\ -2x dx &= dk \\ x dx &= \frac{1}{-2} dk \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} e^k + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Örneği: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi hangi $p \in \mathbb{R}$ sayıları için yakınsaktır?

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^p} > 0$ dir. $\Rightarrow \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ pozitif terimlidir.

$f: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ sürekli dir. $p > 0$ için azalandır. !!!

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = \frac{1}{n^p}$ dir. ($p > 0$ için)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} (\ln|x|)|_1^t, & p=1 \text{ ise} \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^t, & p \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln(t) - \ln(1), & p=1 \text{ ise} \\ \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}, & p \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & p=1 \text{ ise} \\ +\infty, & 0 < p < 1 \text{ ise} \\ -\frac{1}{-p+1}, & p > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & 0 < p \leq 1 \text{ ise, iraksaktır.} \\ \frac{1}{1-p}, & p > 1 \text{ ise, yakınsaktır.} \end{cases}$$

İntegral testinden $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \begin{cases} \text{iraksaktır, } 0 < p \leq 1 \text{ ise} \\ \text{yakınsaktır, } p > 1 \text{ ise} \end{cases}$

$p \leq 0$ ise $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ iraksak olduğu da gösterilen G.T.T. gösterilebilir.

2. P-Testi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \rightarrow \begin{cases} \text{ıraksak}, & p \leq 1 \text{ ise} \\ \text{yakınsaktır}, & p > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Örneği:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow p=1 \leq 1 \Rightarrow p \text{ testinden ıraksak}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow p=2 > 1 \Rightarrow \text{'' '' yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow p=\frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow \text{'' '' ıraksaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \Rightarrow p=-2 \leq 1 \Rightarrow \text{'' '' ıraksak.}$$

3. Genel Terim Testi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ serisi } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{ıraksaklıktır.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{n=1}^{+\infty} 1 & , & \sum_{n=1}^{+\infty} n & , & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2n+3} & , & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(3n+2)} & , & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & +\infty & & \frac{1}{2} & & 1 & & 1 \end{array}$$

G.T.T. ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ için } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ ıraksak.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ için } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ yakınsak.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad \text{G.T.T. iraksak.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \stackrel{+}{=} 0 \Rightarrow \text{G.T.T. Gelişmez.} \end{aligned}$$

4) Geometrik Seriler: $k, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k \cdot r^n = k + k r + k r^2 + k r^3 + \dots + k r^n + \dots$$

Geometrik seri denir.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k \cdot r^n = \begin{cases} \frac{k}{1-r}, & |r| < 1 \text{ ise (yakınsaktır)} \\ \text{iraksak,} & |r| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Örnek:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n \text{ yakınsaktır. Toplamı kaçtır?}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n = \frac{3}{1 - \frac{2}{7}} \text{ yakınsaktır. } \left(\left|\frac{2}{7}\right| < 1 \text{ old.}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^0 - 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^1$$

$$= \frac{3}{1 - \frac{2}{7}} - 3 - \frac{6}{7} = \frac{21}{5} - 3 - \frac{6}{7}$$

$$= \frac{6}{5} - \frac{6}{7} = \frac{12}{35} \text{ yakınsak}$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ yakınsaktır.

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{old.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^0$$
$$= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

yakınsak