

Seriler :

Tanım: $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ şeklinde $\{a_n\}$ dizisinin terimlerinin toplamına bir seri (reel sayı serisi) denir.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ ile gösterilir.}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisinde a_n ye serinin genel terimi denir.

Tanım: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisi için

$$S_1 = a_1 = \sum_{k=1}^1 a_k$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^2 a_k$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^3 a_k$$

$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serinin kısmi toplamlar dizisi denir.

$\{S_n\}$ yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ yakınsaktır.

$\{S_n\}$ ıraksak ise $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ıraksaktır.

Örnekler:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ yakınsalı mıdır?

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 0 + 0 = 0$$

$$S_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

...

$$S_n = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{n \text{ tane}} = 0$$

...

$$\{S_n\} = \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} 0$$

yakınsalıdır.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ yakınsalı mıdır?

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 1 = 2$$

$$S_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

...

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}} = n$$

...

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

$$\{S_n\} = \{n\} \text{ 'dir.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ ıraksalıdır.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty \text{ ıraksalıdır.}$$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ yakınsalı mıdır.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{yok. } \{S_n\} \text{ ıraksak.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \text{ toplamı yok, ıraksalıdır.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -1 & & 0 & & \\ (1) & (-1) & (1) & (-1) & (1) & (-1) & (1) \end{array}$$

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

...

$$S_n = \begin{cases} -1 & , n \text{ tek} \\ 0 & , n \text{ çift} \end{cases}$$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yakınsalımıdır?

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 \text{ yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ yakınsaktır.}$$

5) $\sum_{n=2}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{7}\right)^n$ yakınsalımıdır? $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot r^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$ Geometrik seri

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{7}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot \frac{2}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$S_n = \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right) + \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \dots + \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$= \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^n \right)$$

$$= \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} \left(1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \left[\frac{6}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{7} \left[\frac{6}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{7}\right)^n \right) - \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^n \right]$$

$$S_n = \frac{2}{7} \left[\frac{6}{7} + S_n - \frac{6}{7} \left(\frac{2}{7}\right)^n \right]$$

$$S_n = \frac{12}{49} + \frac{2}{7} S_n - \frac{12}{49} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$S_n - \frac{2}{7} S_n = \frac{12}{49} - \frac{12}{49} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$\frac{5}{7} S_n = \frac{12}{49} - \frac{12}{49} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$S_n = \frac{12}{35} - \frac{12}{35} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{35} - \frac{12}{35} \underbrace{\left(\frac{2}{7}\right)^n}_0 = \frac{12}{35} - \frac{12}{35} \cdot 0 = \frac{12}{35}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n = \frac{12}{35} \quad \text{yukarısalır.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \left(\frac{2}{7}\right)^{n-2} = \frac{12}{49} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{12}{49} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$= \frac{12}{49} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{12}{49} \cdot \frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{12}{35}$$