

Örnekler

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx + \int_1^5 \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx + \int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx$$

3.tip 2.tip 2.tip 1.tip

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int t^{-1/3} dt = \frac{t^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C$$

$\ln x = t$
 $\frac{1}{x} dx = dt$

$$= \frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{t^2} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\ln x)^2} + C$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_5^t \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{(\ln x)^2} \Big|_5^t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\ln t)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\ln 5)^2} = +\infty - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\ln 5)^2} = +\infty$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx \text{ radikaliter.}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}} dx \text{ radikaliter.}$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$$

3.tip 1.tip 2.tip 2.tip

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3(x^3+1)} \Big|_s^{-2} \right)$$

$$= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{21} - \frac{-1}{3(s^3+1)} \right) = \frac{1}{21} + \underbrace{\frac{1}{-\infty}}_0 = \frac{1}{21}$$

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx \text{ yalinsalır.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \int_{-2}^t \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \lim_{t \rightarrow -1^-} \left. \frac{-1}{3(x^3+1)} \right|_{-2}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^-} \left(\frac{-1}{3 \underbrace{(t^3+1)}_{0^-}} - \frac{1}{21} \right) = +\infty - \frac{1}{21} = +\infty \end{aligned}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx \text{ iraksalır.} \Rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx \text{ iraksalır.}$$

Alıştırma

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$2) \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$3) \int_2^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$4) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

$$5) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$6) \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9} dx$$

$$7) \int_{-\infty}^3 \frac{x^3}{x^4+1} dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{u^2} du = \frac{1}{3} \int u^{-2} du$$

$$\begin{aligned} &\boxed{\begin{array}{l} x^3+1=u \\ 3x^2 dx=du \\ x^2 dx=\frac{1}{3} du \end{array}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{3u} + C \\ &= \frac{-1}{3(x^3+1)} + C \end{aligned}$$

Diziler

Tanım: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ doğal sayılar kümesi
olmalı üzere $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olan bir fonksiyonu bir
reel sayı dizisi denir.

$$1 \in \mathbb{N} \text{ için } f(1) = a_1 \in \mathbb{R} \quad 1. \text{ terim}$$

$$2 \in \mathbb{N} \text{ için } f(2) = a_2 \in \mathbb{R} \quad 2. \text{ terim}$$

$$3 \in \mathbb{N} \text{ için } f(3) = a_3 \in \mathbb{R} \quad 3. \text{ terim}$$

$\vdots$

$$n \in \mathbb{N} \text{ için } f(n) = a_n \in \mathbb{R} \quad n. \text{ terim, genel terim}$$

$\vdots$

Olduğundan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ şeklinde bir dizi
terimleri küme parantezi içerisinde sıra ile yazılarak
gösterilebilir. Kısaltılı açısından $\{a_n\}$ veya (a_n) şeklinde
bir dizinin genel terimi ile de ifade edilebilir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

Örnekle: $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

$$\{2\} = \{2, 2, 2, \dots, 2, \dots\} \quad \text{sabit dizi}$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots\right\}$$

$$= \left\{ 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots \right\}$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$$

$$\{0, 3, 0, 5, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

$$a_n = 2a_{n-2} + 3, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1 \text{ dizisinin terimleri}$$

$$\{5, -1, 13, 1, 29, 5, \dots, a_n = 2a_{n-2} + 3, \dots\}$$

Tanım: $\{a_n\}$ bir dizi $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$\{a_n\}$ dizisi a sayısına yakınsaktır denir: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ 'dur.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Bu durum $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ile gösterilir.