

1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz. (20P)

$\lambda = 3$ için

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}S_1 \rightarrow S_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4S_1+S_2 \rightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}[A:B] = \text{rank} A = 1 < 2 = n \Rightarrow 2-1=1$ değişkene bağımlı sonsuz çözüm var.

$$\begin{cases} x - \frac{y}{4} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{4} \quad \text{ÇK} = \left\{ y \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ özvektör.}$$

$\lambda = -2$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4S_1+S_2 \rightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}[A:B] = \text{rank} A = 1 < 2 = n \Rightarrow 2-1=1$ değişkene bağımlı sonsuz çözüm var.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y \Rightarrow \text{ÇK} = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ özvektör.}$$

2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ doğrusunun $x - y - 2z + 3 = 0$ düzlemini deldiği noktayı bulunuz. (15P)

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2} = t$$

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t-1 \\ z = 2t+1 \end{cases} \Rightarrow (3t+2) - (t-1) - 2(2t+1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3t - t - 4t + 2 + 1 - 2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -2t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow x = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

$$y = 2 - 1 = 1$$

$$z = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$\{8, 1, 5\}$
düzlemi
deldiği nokta

3) $\left\{ \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+1} \right\}$ dizisi yakınsak mıdır? (15P)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+1} = e^{3/2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left(1 + \frac{3}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{0}{0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{2n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2n}}}{-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{2n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2n}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3n-1}$ serileri yakınsak mıdır? (20P)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \left|\frac{3}{4}\right| < 1 \Rightarrow \text{Geometrik seri yakınsaktır.} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \leq 1 \quad p\text{-Testi iraksaktır.} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow p = 2 > 1 \quad p\text{-Testi yakınsaktır.} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{G.T.T} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3n-1} \text{ iraksaktır.} \quad (5)$$

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^{n+1}} (x-3)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını (uç noktalar hariç) bulunuz. (15P)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{\cos((n+1)\pi)}{3^{n+1}} (x-3)^{n+1}}{\frac{\cos(n\pi)}{3^{n+1}} (x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cos((n+1)\pi)}{\cos(n\pi)} \cdot \frac{1}{3} (x-3) \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} |x-3| = \frac{1}{3} |x-3| < 1 \Rightarrow \text{yaka.}$$

$$\Rightarrow |x-3| < 3 \Rightarrow -3 < x-3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6$$

$$\Rightarrow \text{Y.A} = (0, 6) \quad (15)$$

6) $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2}$ fonksiyonunun $x_0 = 3$ noktasındaki Taylor serisini bulunuz. (15P)

$$f(x) = 3(2x-3)^{-2}$$

$$f^{(1)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-2) (2x-3)^{-3}$$

$$f^{(2)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-3) (2x-3)^{-4}$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-4) (2x-3)^{-5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 3 \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot (2x-3)^{-(n+2)}$$

$$f^{(n)}(3) = 3 \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot 3^{-(n+2)} \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot 3^{-(n+2)}}{n!} (x-3)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} (n+1) (x-3)^n$$

$$(5)$$

$n \geq 0$
için
geçerli!!!