

Geçen
Hafta
?

Tam Tanımlı Sistem

$$d = Gm$$

$$G^{-1}d = G^{-1}Gm$$

$$G^{-1}d = m$$

K

3	6	-3
1	2	-1
4	8	-4

Warning: Matrix is singular to working precision.

m =

Inf

Inf

Inf

H

3	6	-3
1	2	-1
5	2	7

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate.

m =

0.8750

0.5000

0.4375

	4,3125
d	1,4375
	8,4375

G

2	7	6
9	2	4
3	8	5

m =

0.4876

1.7769

-1.7355

	3,0000
d	1,0000
	7,0000

d

3
1
7

Bu
Hafta

Aşırı Tanımlı Sistem

bilinmeyen < veri

$$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

G

2	7	6
9	2	4
3	8	5

d

3
1
7

G

2	7	6
9	2	4
3	8	5
4	5	7

d

3
1
7
4

m

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



$$d = G \times m$$

$$d = Gm$$

$$G^{-1}d = G^{-1}Gm$$

$$G^{-1}d = m$$



Aşırı Tanımlı Sistem

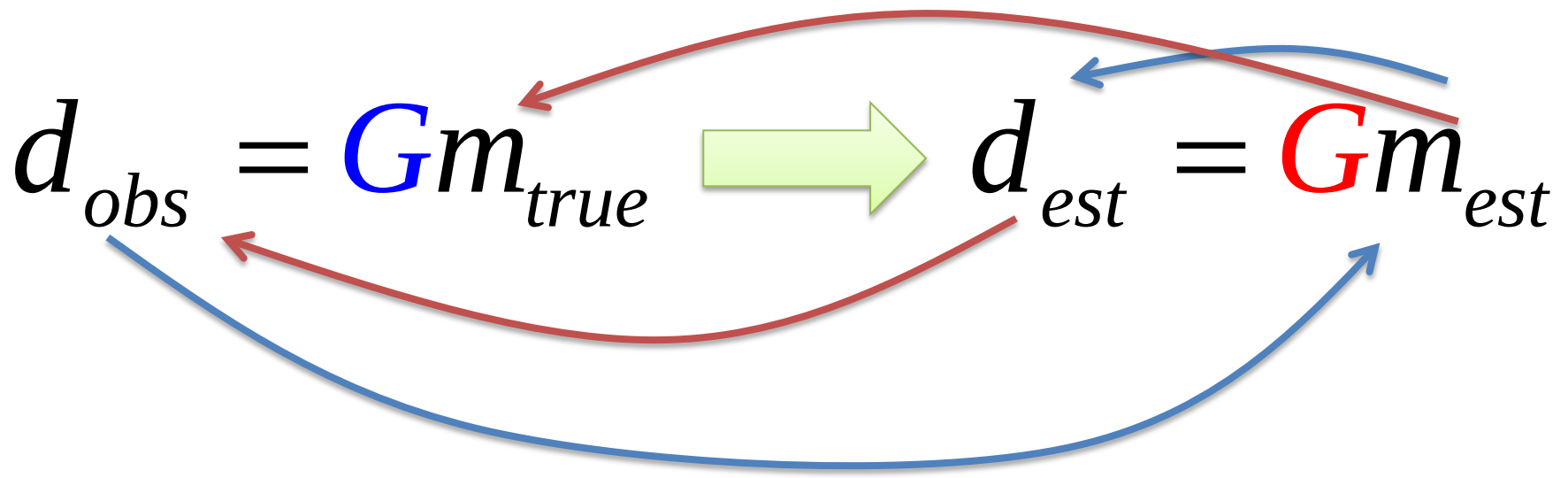
- Genellikle (çok büyük çoğunlukta) tam bir çözümü yoktur

$$Gm \neq d$$

- Dolayısıyla bu tür sistemlerin çözümü sırasında karşımıza bazı yeni kavramlar çıkar
 - **Hata**
 - **Veri ve model ayrımlılığı**

Önemli kavramlar

d	Veri (data)
m	Model parametresi (model parameter)
d_{obs}	Gözlenen veri (observed)
d_{est}	Kestirilen veri (estimated)
m_{est}	Kestirilen model parametresi (estimated)
m_{true}	Gerçek model parametreleri (true)
e	Hata (error)



$$Hata = d_{obs} - d_{est}$$

$$e = d_{obs} - d_{est}$$

$$e = d_{obs} - Gm_{est}$$

$$e = d_{obs} - Gm_{est}$$

Hedef

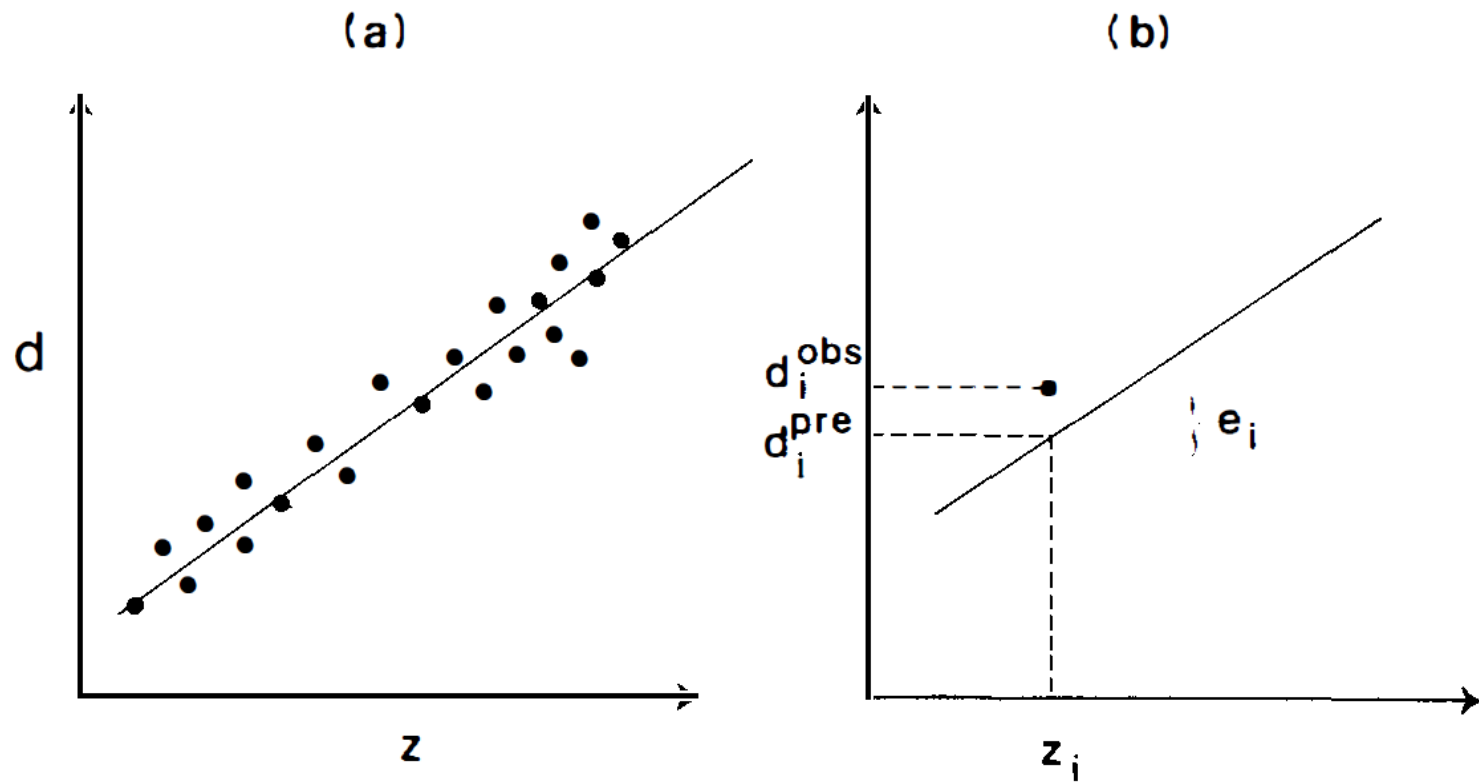
yada

Amaç

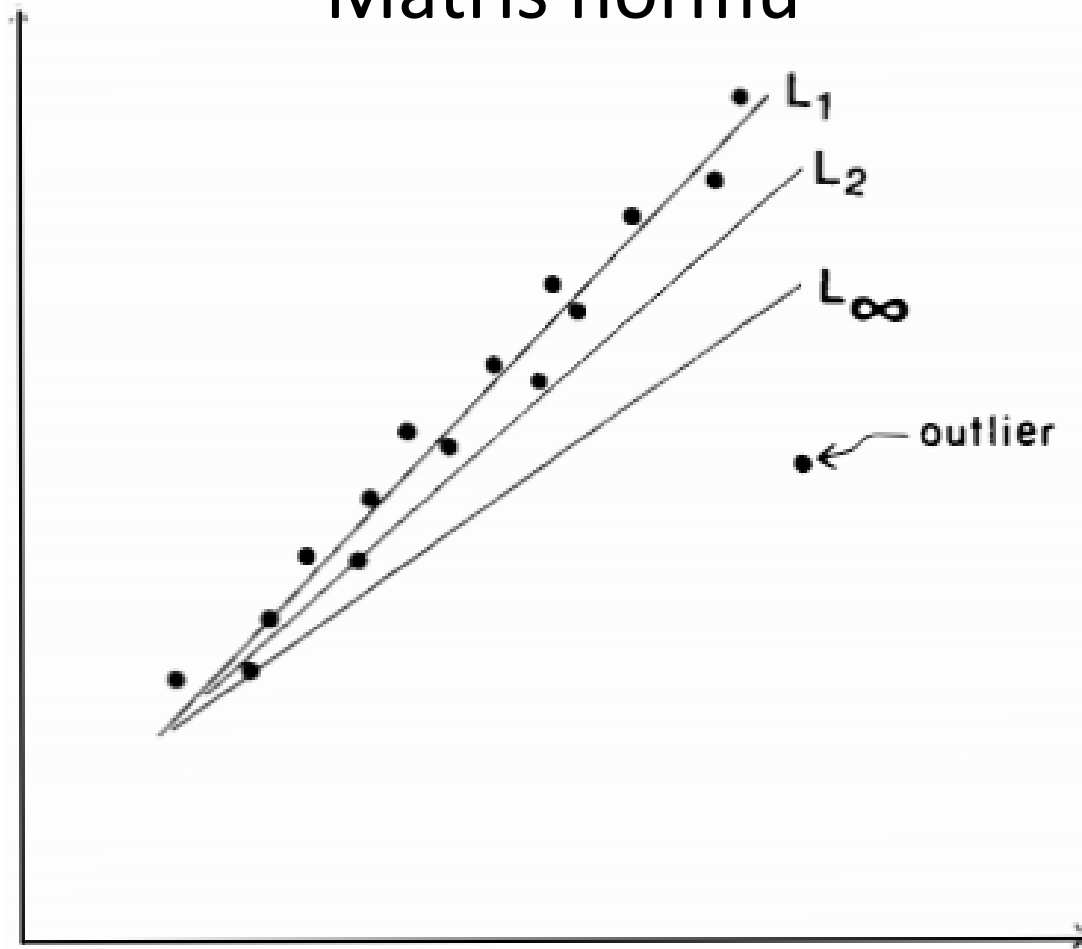


Hatanın en küçük
olacağı şekilde
çözüm elde etmek

Hatanın en
küçüklenmesi



Çözüm boyu Matris normu



Hatanın karelerinin
toplamı



En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)
Least Square Method (LSM)

EKK' de

Hedef

yada

Amaç

$$\varphi = e^T e$$

Hatanın en küçük
olacağı şekilde
çözüm elde etmek

Hatanın en
küçüklenmesi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$$

$$e = d_{obs} - Gm_{est}$$

$$\varphi = e^T e$$

$$\varphi = e^T e$$

$$= (d_{obs} - Gm_{est})^T (d_{obs} - Gm_{est})$$

$$= (d_{obs}^T - m_{est}^T G^T) (d_{obs} - Gm_{est})$$

$$= d_{obs}^T d - d_{obs}^T Gm_{est} - m_{est}^T G^T d_{obs} + m_{est}^T G^T Gm_{est}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_{est}} = 0$$

$$\varphi = d_{obs}^T d - d_{obs}^T G m_{est} - m_{est}^T G^T d_{obs} + m_{est}^T G^T G m_{est}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_{est}} = -d_{obs}^T G - G^T d_{obs} + G^T G m_{est} + m_{est}^T G^T G = 0$$

$$= 2G^T G m_{est} - 2G^T d_{obs} = 0$$

$$2G^T G m_{est} = 2G^T d_{obs}$$

$$G^T G m_{est} = G^T d_{obs}$$

$$m_{est} = \left(G^T G \right)^{-1} G^T d_{obs}$$

$$m_{est} = \underbrace{(G^T G)^{-1} G^T}_{\text{EKK için Genelleştirilmiş Ters}} d_{obs}$$

EKK için Genelleştirilmiş Ters

$$G^{-g}$$

$$m_{est} = G^{-g} d_{obs}$$

Unutulmaması gereken çok önemli nokta:

Bu çözüm, hataların karelerinin en küçüklenmesine dayanmaktadır

yani

Hata içerir

Hata Nedir? Miktarı ?

Biz EKK yönteminde neyi en küçüklemeyi çalıştık

Hataların karelerinin toplamı

Dolayısıyla yaptığımız çözümün kalitesini yada ne kadar iyi bir yaklaşım yaptığımızı hataların karesinin toplamını temsil eden bir parametre üzerinden yapmamız gerekir.

$$RMS \ Hata = \sqrt{\frac{\sum (d_{obs} - d_{est})^2}{N}}$$

Veri ve Parametre Ayrımlılığı

Veri Ayrımlılığı (Data Resolution)

$$d_{est} = Gm_{est}$$

$$d_{est} = G \left(G^{-g} d_{obs} \right)$$

$$d_{est} = GG^{-g} d_{obs}$$

$$d_{est} = N d_{obs}$$

$$N = GG^{-g}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Anlamı Nedir Araştırın ?

Model Ayrımlılığı (Model Resolution)

$$m_{est} = G^{-g} d_{obs}$$

$$m_{est} = G^{-g} G m_{true}$$

$$m_{est} = R m_{true}$$

$$R = G^{-g} G$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Anlamı Nedir Araştırın ?

G

2	7	6
9	2	4
3	8	5
4	5	7

d

3
1
7
4

m

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{est} = (G^T G)^{-1} G^T d_{obs}$$

- RMS hata
- Veri ayrımlılık matrisi
- Model ayrımlılık matrisi

