

Geçen
Hafta
?

G

2	7	6
9	2	4
3	8	5
4	5	7

d

3
1
7
4

m

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{est} = \left(G^T G \right)^{-1} G^T d_{obs}$$

- RMS hata
- Veri ayrımlılık matrisi
- Model ayrımlılık matrisi

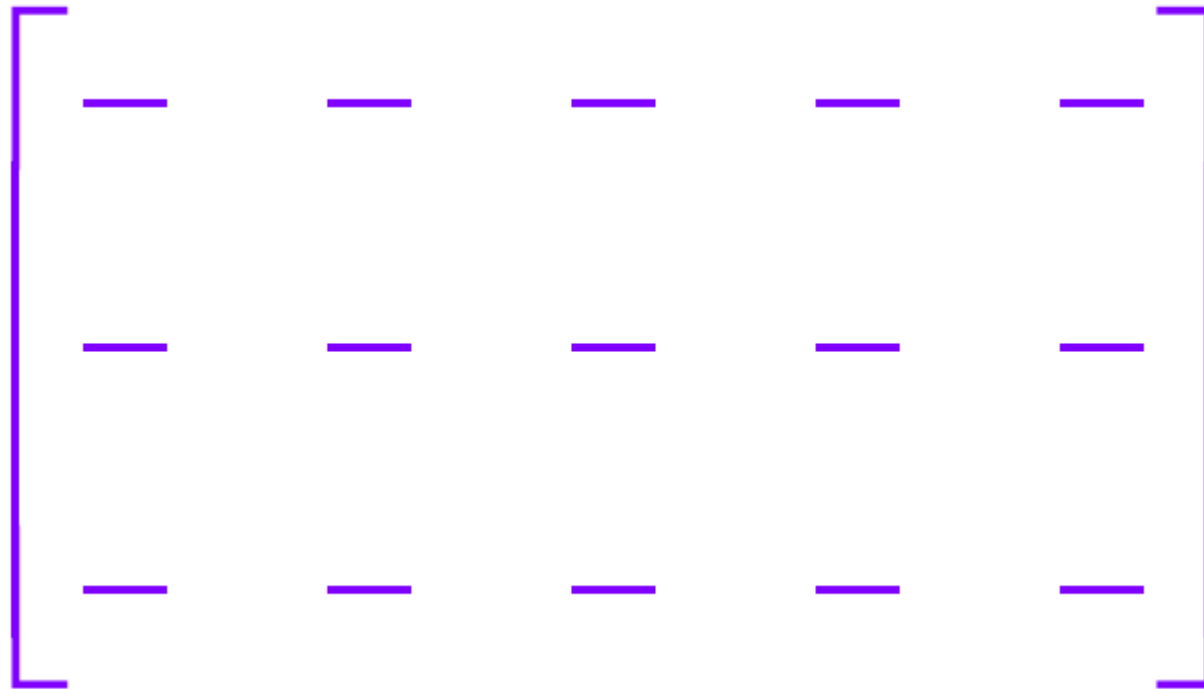


Bu Hafta

Eksik Tanımlı
Sistem

Eksik Tanımlı Sistem

bilinmeyen > veri



A 4x5 matrix of dashes representing an underdetermined system. The matrix is enclosed in large square brackets. Each row contains five dashes, and there are four rows in total.

—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Şimdiye kadar gördüğümüz çözümler
bu sistemin çözülmesinde

işe yarar mı ?

HAYIR

$$m_{est} = \left(G^T G \right)^{-1} G^T d_{obs}$$

Peki nasıl bir çözüm geliştirmemiz
gerekliyor ?

Çözüm önermek için problemi
anlamamız şart

Basit bir Eksik Tanımlı Sistem (ETS) önerelim

$$x + y = 3$$

Bilinmeyen sayısı: 2
Veri sayısı: 1

ETS

Farklı x ve y kombinasyonları için sonsuz çözüm var

$$1 + 2$$

$$5 - 2$$

$$-1 + 4$$

$$1006 - 1003$$

$$-2000005 + 2000008$$

$\vdots$

Tüm çözümler için

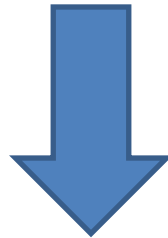
$$e = d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

Peki en basit çözüm
hangisi ?

Ters çözümde basit çözüm



model parametrelerinin Euclidean
boyunun küçük olması



Model normunun küçük olması

$$\|m\|_2$$



Frobenius
L2 norm

[Farklı model normları tanımları için tıklayın](#)

$$x + y = 3$$

$$e = d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

$$\|m\|_2$$

1 + 2	En basit Çözüm	5
5 - 2		29
-1 + 4		17
1006 - 1003		2018045
-2000005 + 2000008		8×10^{12}
⋮		

Tüm bu süreçte biz ne yaptık

$$x + y = 3$$

ETS sistemini

$$e = d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

yapan

$$\|m\|_2$$

En küçük model normuna sahip

En basit çözümünü elde ettik

Bu çözümde en küçüklenmesi gereken parametre model normu iken, bu en küçükleme işleminin $e=0$ şartı altında yapılması gerektiğini unutmayalım

Bir fonksiyonun (parametrenin vs vs), bir şart yada kısıtlama altında en küçüklenmesi (yada en büyüklenmesi) Lagrange Çarpanları (λ) yardımıyla yapılabilir.

ETS' de AMAÇ, model normunun, hatanın sıfır olması şartı altında en küçüklenmesi

$$\varphi = \|m_{est}\|_2 + \lambda (d_{obs} - Gm_{est})$$

$$\varphi = \|m_{est}\|_2 + \lambda (d_{obs} - Gm_{est})$$

$$\varphi = m_{est}^T m_{est} + \lambda d_{obs} - \lambda Gm_{est}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_{est}} = m_{est} + m_{est} - \lambda G = 0$$

$$= 2m_{est} - \lambda G = 0 \Rightarrow 2m_{est} = \lambda G \Rightarrow m_{est} = \frac{1}{2} G^T \lambda$$


Bu gösterim için bakınız kaynak 1 ve kaynak 2

Kaynak 1: Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Problemlerin Ters Çözümü, sayfa 43, Ahmet T. Başokur, TMMOB Jeofizik Müh. Odası Eğitim yayınları No:4

Kaynak 2: Inverse Problems in Geophysics GEOS 567 Course Notes, sayfa 48, R.M. Richardson ve G. Zandt, University of Arizona

$$\varphi = \|m_{est}\|_2 + \lambda (d_{obs} - Gm_{est})$$

$$d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

$$d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

$$d_{obs} - G\left(\frac{1}{2}G^T\lambda\right) = 0$$

$$d_{obs} = G\left(\frac{1}{2}G^T\lambda\right)$$

$$2d_{obs} = (GG^T)\lambda$$

$$2(GG^T)^{-1}d_{obs} = (GG^T)^{-1}(GG^T)\lambda$$

$$2(GG^T)^{-1}d_{obs} = \lambda$$

$$m_{est} = \frac{1}{2} G^T \lambda \quad 2(GG^T)^{-1} d_{obs} = \lambda$$


$$m_{est} = \frac{1}{2} G^T 2(GG^T)^{-1} d_{obs}$$

$$m_{est} = G^T (GG^T)^{-1} d_{obs}$$

$$m_{est} = \underbrace{G^T (GG^T)^{-1}}_{\text{ETS için Genelleştirilmiş Ters}} d_{obs}$$

ETS için Genelleştirilmiş Ters

$$G_{ETS}^{-g}$$

Hangi şart altında çözüm aradık

$$e = d_{obs} - Gm_{est} = 0$$

Dolayısıyla ters çözüm sonuçlarını
kontrol etmek için

Ortalama Mutlak Hata
(Mean Absolute Error)

$$MAE = \frac{1}{N} \sum |d_{obs} - d_{est}|$$

G

2	7	6
9	2	4

d

3
1

m

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{est} = G^T (GG^T)^{-1} d_{obs}$$

- MAE hata
- Veri ayrımlılık matrisi
- Model ayrımlılık matrisi

