

DENGELEME HESABI-I DERS NOTLARI

Ağırlıkları Eşit Dolaysız (Direkt) Ölçüler Dengelemesi

Prof. Dr. Mualla YALÇINKAYA

Doç. Dr. Emine TANIR KAYIKÇI

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Harita Mühendisliği Bölümü

Ağırlıkları Farklı Dolaysız Ölçüler Dengelemesi (Ağırlıklı Ortalama)

Stokastik Model:

$$p_i = \frac{sabit}{m_i^2} = \frac{s_0^2}{m_i^2}$$

s_0 : Birim ölçünün öncül ortalama hatası

Ölçüler

$$L_1 \pm m_1$$

$$L_2 \pm m_2$$

$\vdots$

$$L_n \pm m_n$$

Ağırlıklar

$$p_1$$

$$p_2$$

$\vdots$

$$p_n$$

Fonksiyonel Model:

Ölçü + Düzeltmesi = Kesin değer

$$L_i + v_i = x$$

Ölçüler

$$L_1 \pm m_1$$

$$L_2 \pm m_2$$

$\vdots$

$$L_n \pm m_n$$

Düzeltmeler

$$v_1$$

$$v_2$$

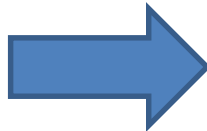
$\vdots$

$$v_n$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ (n , ölçü sayısı)

Fonksiyonel Model:

$$L_i + v_i = x$$



$$v_i = x - L_i$$

Düzeltilme Denklemleri

$$v_1 = x - L_1$$

$$v_2 = x - L_2$$

$$\vdots$$

$$v_n = x - L_n$$

Matematik Model

(Fonksiyonel Model + Stokastik Model)

Fonksiyonel Model

$$v_i = x - L_i$$

$$\begin{aligned} v_1 &= x - L_1 \\ v_2 &= x - L_2 \\ &\vdots \\ v_n &= x - L_n \end{aligned}$$

Stokastik Model

$$p_i$$

$$\begin{aligned} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{aligned}$$

Küçük sayılarla çalışıp kolaylığı sağlamak amacıyla bilinmeyen x , bilinmeyen yaklaşık değeri x_0 ve dengeleme bilinmeyeni dx olarak iki bileşene ayrılır.

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer

$$x_0$$

Bilinmeyen Yaklaşık Değeri

$$dx$$

Dengeleme Bilinmeyeni

Düzeltilme Denklemleri

$$v_i = x - L_i$$

$$v_i = x_0 + dx - L_i$$

$$v_i = dx - (L_i - x_0)$$

$$l_i = (L_i - x_0)$$

Ötelenmiş ölçüler

$$v_i = dx - l_i$$

Düzeltilmeler

$$v_i = dx - l_i$$

p_i

$$v_1 = dx - l_1$$

p_1

$$v_2 = dx - l_2$$

p_2

$\vdots$

$\vdots$

$$v_n = dx - l_n$$

p_n

Amaç Fonksiyonu

$$[pvv] = \min$$

En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)
Amaç Fonksiyonu

$v_1 = dx - l_1$	p_1
$v_2 = dx - l_2$	p_2
$\vdots$	$\vdots$
$v_n = dx - l_n$	p_n

$$[pvv] = [p]dx^2 - 2dx[pl] + [pll]$$

Amaç Fonksiyonu

$$[pvv] = [p]dx^2 - 2dx[pl] + [pll]$$

EKK yöntemine göre amaç fonksiyonu minimum olması için $[pvv]$ bilinmeyenlere (x) göre birinci türevi (0) olmalıdır.

$$\frac{\partial [pvv]}{\partial dx} = 2[p]dx - 2[pl] = 0$$

$$2[p]dx - 2[pl] = 0$$



$$[p]dx - [pl] = 0$$



$$dx = \frac{[pL]}{[p]}$$

Normal Denklem

Dengeleme Bilinmeyeni

$$dx = \frac{[pl]}{[p]}$$

Dengeleme Bilinmeyen

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer (Ağırlıklı Ortalama)

$$v_i = dx - l_i$$

Düzeltilmeler

Denetim İşlemleri

1. Düzeltmelerin Ağırlıklı Toplamı $[pv]$ Kontrolü

$$\begin{array}{l} v_1 = dx - l_1 \\ v_2 = dx - l_2 \\ \vdots \\ v_n = dx - l_n \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}$$

$$[pv] = [p]dx - [pl]$$

dx yerine yazılırsa;

$$dx = \frac{[pl]}{[p]}$$

$$[pv] = [p] \frac{[pl]}{[p]} - [pl]$$

$$[pv] = 0 \quad \text{Denetim 1}$$

Düzeltmelerin Ağırlıklı Toplamı Kontrolü

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamı $[pvv]$ Kontrolü

p_1	v_1	$v_1 = dx - l_1$
p_2	v_2	$v_2 = dx - l_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_n	v_n	$v_n = dx - l_n$

Düzeltme denklemlerinin her iki tarafı $p_i v_i$ ile çarpılıp toplanırsa

$$[pvv] = dx [pv] - [pvl]$$

$$[pv] = 0$$

$$[pvv] = -[pvl] \quad \text{Denetim 2}$$

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamı $[pvv]$ Kontrolü

$$[pvv] = -[pvl]$$

p_1	$-l_1$	$v_1 = dx - l_1$
p_2	$-l_2$	$v_2 = dx - l_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_n	$-l_n$	$v_n = dx - l_n$

Düzeltme denklemlerinin her iki tarafı $(-p_i l_i)$ ile çarpılıp toplanırsa

$$-[pvl] = -dx[pl] + [pll]$$

$$[pvv] = [pll] - dx[pl]$$

Denetim 3

Denetim İşlemleri

2. Düzeltmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamı $[pvv]$ Kontrolü

$$[pvv] = [pll] - dx[pl]$$

dx yerine $\frac{[pl]}{[p]}$ yazılarak

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}$$

Denetim 4

Denetim İşlemleri

SONUÇ DENETİMİ

ÖLÇÜ + DÜZELTMESİ = KESİN DEĞER

$$L_i + v_i = x$$

?

Duyarlık Hesapları

Birim Ölçünün Ortalama Hatası

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

Ağırlığı **p=1** olan ölçünün ortalama hatası

Gözlemlerin Ortalama Hatası

$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$$

Ağırlığı **p_i** olan ölçünün ortalama hatası

Kesin Değerin Ortalama Hatası

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

Uygulama 1

Bir nivelman noktasına 5 ayrı noktadan yükseklik taşınmıştır. Noktanın 5 ayrı geçkiden elde edilen yükseklikleri L ve geçki uzunlukları s_i verildiğine göre, nivelman noktasının kesin yüksekliğini, ölçülerin ve kesin yüksekliğin ortalama hatasını hesaplayınız.

Ölçüler $L(m)$	Geçki Uzunlukları $s (km)$	Ağırlık $p_i=10/s$
157.048	3.1	3.1
157.052	2.0	5.0
157.055	6.1	1.6
157.049	5.3	1.9
157.042	10.0	1.0

1- Stokastik Model

$$p_i = \frac{sabit}{s_{i(km)}} = \frac{10}{s_{i(km)}}$$

2- Bilinmeyenin yaklaşık değerinin seçimi

$$x_0 = 157.040 \text{ m}$$

Uygulama 1

Ölçüler L (m)	Ötelenmiş Ölçüler (l) (mm)
157.048	8
157.052	12
157.055	15
157.049	9
157.042	2

3- Ötelenmiş ölçünün hesabı

$$l_i = (L_i - x_0)$$

4- Dengeleme bilinmeyeninin hesabı

$$dx = \frac{[pl]}{[p]}$$

$$dx = \frac{128.7}{12.7} = 10.13 \text{ mm}$$

5- Bilinmeyen (yüksekliğin) kesin değeri

$$x = x_0 + dx$$

$$\begin{aligned} x &= 157.040 \text{ m} + 10.13 \text{ mm} \\ x &= 157.0501 \text{ m} \end{aligned}$$

Uygulama 1

Ötelenmiş Ölçüler (l_i) (mm)	Düzeltilme v_i (mm)
8	2.1
12	-1.9
15	-4.9
9	1.1
2	8.1

6- Düzeltmelerin hesabı

$$v_i = dx - l_i$$

$$dx = 10.13 \text{ mm}$$

7- Denetim işlemleri

1- Düzeltmelerin Toplamı $[pv]$ Kontrolü

$$[pv] = -0.4 \text{ mm} = \sim 0$$

Denetim 1

2- Düzeltmelerin Ağırlıklı Kareleri Toplamı $[pvv]$ Kontrolü

$$[pvv] = 138.49$$

$$[pvv] = -[plv]$$

Denetim 2

$$[pvv] = [pll] - dx[pl]$$

Denetim 3

$$[pvv] = 1442.7 - 10.1 * 128.7 = 142.83$$

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}$$

Denetim 4

$$[pvv] = 1442.7 - \frac{128.7^2}{12.7} = 138.47$$

Uygulama 1

8- Duyarlık hesapları

Birim Ölçünün Ortalama Hatası

(Ağırlığı $p=1$ olan ölçünün ortalama hatası)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{138.49}{4}} = \pm 5.9 \text{ mm}$$

Kesin Değerin Ortalama Hatası

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{[p]}}$$

$$m_x = \pm \frac{5.9}{\sqrt{12.7}} = \pm 1.7 \text{ mm}$$

Ağırlığı p_i olan ölçülerin ortalama hatası

$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$$

Ortalama
Hata m_i
(mm)

3.3

2.6

4.7

4.3

5.9

Uygulama 1

9- Sonuç Denetimi

$$L_i + v_i = x$$

Ölçüler L (m)	Düzeltilme v_i (mm)	Kesin Değer x (m)
157.048	2.1	157.0501
157.052	-1.9	157.0501
157.055	-4.9	157.0501
157.049	1.1	157.0501
157.042	8.1	157.0501

Ağırlıkları Farklı Dolaysız Ölçüler Dengelemesi

MATRİS GÖSTERİMİ

Stokastik Model:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

Stokastik Model
(Ağırlık Matrisi)

P köşegen matris

Fonksiyonel Model:

Düzeltilme Denklemi

$$\begin{array}{l} v_1 = dx - l_1 \\ v_2 = dx - l_2 \\ \vdots \\ v_n = dx - l_n \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}$$

$$V = e \, dx - l$$

Fonksiyonel Model
(Düzeltilme Denklemi)

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Düzeltilme vektörü

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bir vektörü

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

Ötelenmiş ölçü vektörü

$$V = e \, dx - l$$

Fonksiyonel Model
(Düzeltilme Denklemi)

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

P köşegen matris

Stokastik Model
(Ağırlık Matrisi)

$$V^T P V = \min.$$

EKK Amaç Fonksiyonu

$$V = e dx - l$$

$$V^T P V = \min.$$

$$V^T P V = e^T P e dx^2 - 2e^T P l dx + l^T P l$$

$$\frac{\partial(V^T V)}{\partial dx} = 2 e^T P e dx - 2e^T P l = 0$$

$$e^T P e dx - e^T P l = 0$$

Normal Denklemler

$$dx = \frac{e^T P l}{e^T P e}$$

Dengeleme bilinmeyenini

$$x = x_0 + dx$$

Kesin Değer

$$V = e dx - l$$

Düzeltilmeler

Denetim İşlemleri

1- $e^T P V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

Soldan $e^T P$ ile çarpılır

$$e^T P V = e^T P e \, dx - e^T P l$$

$$dx = \frac{e^T P l}{e^T P e}$$

$$e^T P V = e^T P e \frac{e^T P l}{e^T P e} - e^T P l$$

$$e^T P V = 0$$

$$V^T P e = 0$$

Denetim 1

Denetim İşlemleri

2- $V^T P V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

Soldan $V^T P$ ile çarpılır

$$V^T P V = V^T P e \, dx - V^T P l$$

$$V^T P e = 0$$


$$V^T P V = - V^T P l$$

$$V^T P V = - l^T P V$$

Denetim 2

Denetim İşlemleri

2- $V^T P V$ Denetimi

$$V = e \, dx - l$$

Soldan $-l^T P$ ile çarpılır

$$-l^T P V = -l^T P e \, dx + l^T P l$$

$$V^T P V = -l^T P V = l^T P l - l^T P e \, dx$$

Denetim 3

$$V^T P V = -V^T P l = l^T P l - dx \, e^T P l$$

Denetim İşlemleri

2- $V^T P V$ Denetimi

$$V^T P V = - V^T P l = l^T P l - dx e^T P l$$

$$dx = \frac{e^T l P}{e^T P e}$$

$$V^T P V = - V^T P l = l^T P l - \frac{e^T P l}{e^T P e} e^T P l$$

$$V^T V = - V^T P l = l^T P l - \frac{(e^T P l)^2}{e^T P e}$$

Denetim 4

Denetim İşlemleri

SONUÇ DENETİMİ

ÖLÇÜ + DÜZELTMESİ = KESİN DEĞER

$$L + V = ex$$

?

Duyarlık Hesapları

Birim Ölçünün Ortalama Hatası

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{n - 1}}$$

Ağırlığı **p=1** olan ölçünün ortalama hatası

Gözlemlerin Ortalama Hatası

$$m_i = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$$

Ağırlığı **p_i** olan ölçünün ortalama hatası

Kesin Değerin Ortalama Hatası

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{e^T P e}}$$

Duyarlık hesapları

$$V = e \, dx - l$$

$$V = e \frac{e^T P l}{e^T P e} - l$$

$$V = \left(\frac{e \, e^T P}{e^T P e} - E \right) l$$

$$dV = \left(\frac{e e^T P}{e^T P e} - E \right) dl$$

$$P Q_{ll} = E$$

$$Q_{ll} P = E$$

$$Q_{vv} = \left(\frac{e e^T P}{e^T P e} - E \right) Q_{ll} \left(\frac{e \, e^T P}{e^T P e} - E \right)^T$$

$$Q_{vv} = \left(\frac{e \, e^T P}{e^T P e} - E \right) Q_{ll} \left(\frac{P e \, e^T}{e^T P e} - E \right)$$

$$Q_{vv} = \frac{e \, e^T P}{e^T P e} Q_{ll} \frac{P e \, e^T}{e^T P e} - \frac{e \, e^T P}{e^T P e} Q_{ll} - Q_{ll} \frac{P e \, e^T}{e^T P e} + Q_{ll}$$

$$Q_{vv} = \frac{e e^T}{e^T P e} - \frac{e e^T}{e^T P e} - \frac{e e^T}{e^T P e} + Q_{ll}$$

$$Q_{vv} = Q_{ll} - \frac{e e^T}{e^T P e}$$

$$m_{vi} = \pm m_0 \sqrt{q_{vivi}}$$

Düzeltilmelerin Ortalama Hatası